आओ सोचें और हल करें

गणित वर्कशीट
(Level-1)

कक्षा—9

बुनियादी (Foundational) स्तर के लिए (Level-1)

आधारभूत गणित के बारे में :

गणित की आधारभूत दक्षताओं (Foundational Skills) के सन्दर्भ में बच्चों से बातचीत करते समय उनकी समझ विकसित करने पर भी ध्यान दिया जाए। ऐसा करने से बच्चे मूर्त (Concrete) से अमूर्त (Abstract) गणित को सहज तरीक़े से कर सकेंगे। बच्चे अपने आस–पास तथा अपने पूर्व अनुभव एवं ज्ञान के आधार पर लगातार कुछ न कुछ सीखते रहते हैं। यदि बच्चों के पूर्व ज्ञान को आधार बनाकर उनकी मदद की जाए तो उनकी समझ और पक्की हो सकती है। इसके लिए उनसे बातचीत करना, उनका तर्क जानना और उनके पूर्व ज्ञान को नई दिशा देने की ज़रूरत होगी।

बच्चों के साथ सीखने–सिखाने के कार्य इस प्रकार किये जाएँ कि वे कम से कम समय में इन आधारभूत दक्षताओं को बड़ी सहजता और आत्मविश्वास के साथ करने लगें। साथ ही अपनी गणितीय सोच को बता पाएँ। इस प्रक्रिया में हमारी भूमिका एक प्रेरक (Facilitator) के रूप में होगी। बच्चों को जहाँ मदद की ज़रूरत होगी वहाँ हमें उनकी मदद भी करनी होगी।

"आओ सोचें और हल करें" (बुनियादी वर्कशीट) के बारे में :

ऐसे बच्चे जिन्हें गणित की आधारभूत दक्षताओं – जोड़, घटाव, गुणा, भाग और भिन्न की अवधारणाओं (Concepts) को समझने की ज़रूरत है, उनके लिए इस वर्कशीट का उपयोग किया जा सकता है। इस वर्कशीट में कुल सात milestones हैं। हर एक milestone के दो हिस्से किए गए हैं। पहले हिस्से में दक्षताओं से संबंधित हल किए हुए उदाहरण दिए गए हैं जबकि दूसरे हिस्से में उससे सम्बंधित कार्य दिए गए हैं। बच्चों को इन्हें स्वयं से हल करना है। बच्चे वर्कशीट हल करने के लिए शिक्षक और अपने दोस्तों की मदद ले सकते हैं।

वर्कशीट का उपयोग :

- ❖ वर्कशीट में हल किए गए नमूने (Solved Sample) को समझकर बच्चों को सवाल हल करना है।
- ❖ बच्चों को सवाल हल करने के लिए 3–4 वर्कशीट दिए गए हैं। प्रत्येक वर्कशीट के लिए 1–2 दिन निर्धारित किया गया है।
- ❖ शिक्षक बच्चों को समूह में हल करने के लिए प्रेरित करें जिससे बच्चे एक–दूसरे से सीख सकें।
- ❖ मुश्किल प्रश्नों को हल करने की रणनीति (Strategy) को कोई समूह या बच्चा सामने आकर पूरी कक्षा को समझाएँ। ज़रूरत के अनुसार प्रेरक उनकी मदद करें।
- ❖ जो बच्चे आधारभूत दक्षताओं को कम समय में ही हासिल कर लेते हैं या वह बच्चे जिनकी आधारभूत दक्षता पहले से ही है, उनके साथ Level–2 स्तर की वर्कशीट और पाठ्य–सामग्री का इस्तमाल करें।

कक्षा आधारित स्तर के लिए (Level-2)

Level-2 के लिए 3 विषय–वस्तु जो बच्चों के दूसरे Summative Assessment का लगभग 70 प्रतिशत पाठ्यक्रम (Syllabus) cover करता है, उनमें से चुना गया है :

1. बीजगणित (Algebra)
2. ज्यामिति (Geometry)
3. सांख्यिकी (Statistics)

इस स्तर के बच्चों को स्व–अध्ययन करने के लिए पाठ्य–सामग्री तैयार की गई है। इसमें सरल उदाहरणों द्वारा पाठ्य–सामग्री को समझाया गया है और उसके आधार पर प्रश्नों को हल करने के लिए दिया गया है। साथ ही अपनी कक्षा की पाठ्य–पुस्तक से भी अभ्यास करने के लिए कहा गया है।

यहाँ इन तीनों विषय–वस्तुओं की शुरूआत उन बच्चों के साथ करें जिन्हें अपेक्षित पूर्व–ज्ञान हो अन्यथा उन बच्चों के साथ पहले Level-1 की वर्कशीट कराएँ।

यहाँ इन तीनों विषयों की Trajectory और इसे समझने के लिए बच्चों से जो पूर्व ज्ञान अपेक्षित हैं, उसकी जानकारी नीचे दी जा रही है।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान (Expected Prior Knowledge) :

बीजगणित (Algebra) :

- गणित के बुनियादी चिन्हों (Symbols) की समझ, जैसे– :, +, –, = आदि
- मौलिक संक्रियाएँ (Basic operations) कर पाने की क्षमता (जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग)
- शाब्दिक सवालों (Word problems) को पढ़कर समझने की क्षमता
- पूर्णांक (Integers)
- चर (Variable) एवं अचर (Constant) की बुनियादी समझ

ज्यामिति (Geometry) :

- बिन्दु (Point), रेखा (Line), किरण (Ray), रेखाखण्ड (Line Segment) आदि बुनियादी ज्यामितीय आकारों की समझ
- ज्यामिति बॉक्स (Geometry Box) के विभिन्न उपकरणों (Tools) एवं उनके उपयोग की समझ
- चाप (Arc), समद्विभाजक (Bisector) एवं लंब–समद्विभाजक (Perpendicular Bisector) के अवधारणा की समझ
- त्रिभुज एवं कोण (Angle) के गुणधर्मों [बहुभुजों (Polynomials) के संदर्भ में] की समझ
- मौलिक संक्रियाएँ (Basic Operations) कर पाने की क्षमता
- शाब्दिक सवालों को पढ़कर समझने की क्षमता

संख्यिकी (Statistics) :

- संख्याओं की समझ
- मौलिक संक्रियाएँ कर पाने की क्षमता
- समझकर पढ़ने की क्षमता
- साधारण और दशमलव भिन्नों की समझ
- कार्तीय तल (*x*–अक्ष, *y*–अक्ष) की समझ
- ज्यामिति बॉक्स के विभिन्न उपकरणों एवं उनके उपयोग की समझ

पाठ्य–सामग्रियों के साथ काम कैसे करें?

इन तीनों विषय–वस्तुओं, बीजगणित, ज्यामिति और सांख्यिकी से संबंधित नीचे Trajectory दी गई है। इसी trajectory के अनुसार क्रम से बच्चों के साथ काम करना है। इस trajectory में पाठ्य–सामग्री की पृष्ठ संख्या भी दी हुई है। बच्चों को कोई भी पाठ्य–सामग्री देने से पहले उनसे पूछें कि इसके बारे में वे क्या जानते हैं। बच्चों को जवाब के लिए प्रोत्साहित करें और दिए गए जवाब के मुख्य बिन्दुओं को ब्लैकबोर्ड पर लिखें। इसके बाद लगभग 10 मिनट तक उन बिन्दुओं पर चर्चा करें। चर्चा हो जाने के बाद पाठ्य–सामग्री की उक्त पृष्ठ संख्या निम्नलिखित trajectory के अनुसार बच्चों को पढ़ने के लिए दें और दिए गए प्रश्नों को हल करवाएँ। साथ ही 9वीं कक्षा की पाठ्य–पुस्तक से संबंधित विषय–वस्तु का अभ्यास कराएँ। बच्चों को जहाँ समस्या आ रही हो वहाँ उनकी मदद भी करें।

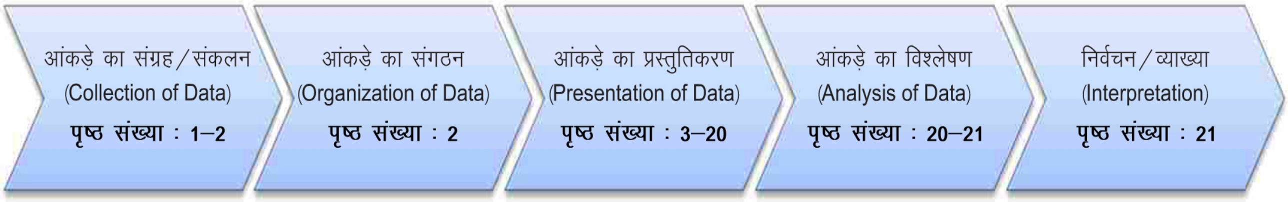
बीजगणित (Algebra) :

1. एक और दो चर वाले समीकरण (Equations) का परिचय एवं अवधारणा **पृष्ठ संख्या : 1–2**
2. दो चार वाले समीकरणों को हल करना **पृष्ठ संख्या : 3–7**
3. संख्या रेखा एवं कार्तीय तल का परिचय **पृष्ठ संख्या : 8**
4. दो चर वाले समीकरणों को ग्राफ़ में दर्शाना **पृष्ठ संख्या : 8–11**

ज्यामिति (Geometry) :

1. बुनियादी ज्यामितीय आकारों से परिचय एवं उनके गुणधर्म **पृष्ठ संख्या : 1–2**
2. परिमिति एवं क्षेत्रफल की अवधारणा (आयत एवं वर्ग) **पृष्ठ संख्या : 2–3**
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल (हीरोन के सूत्र द्वारा आधार एवं ऊँचाई ज्ञात करके), पाइथागोरस प्रमेय **पृष्ठ संख्या : 3–5**
4. समांतर चतुर्भुज से परिचय एवं उसके गुणधर्म **पृष्ठ संख्या : 5–6**
5. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल **पृष्ठ संख्या : 6**
6. सर्वांगसमता से परिचय, त्रिभुज के संदर्भ में सर्वांगसमता **पृष्ठ संख्या : 7–8**
7. त्रिभुजों की सर्वांगसमता एवं समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल पर आधारित प्रमेयों को सिद्ध करना **पृष्ठ संख्या : 8**
8. वृत्त एवं उसके भागों से परिचय **पृष्ठ संख्या : 9–10**
9. वृत्त एवं कोण से जुड़े प्रमेयों को सिद्ध करना **पृष्ठ संख्या : 10–12**
10. रेखाखण्ड, कोण एवं उसके समद्विभाजकों की रचना **पृष्ठ संख्या : 13–17**
11. त्रिभुज की परिमिति, उसके गुणधर्म, उसकी दो भुजाओं के योग या उनके अंतर के आधार पर त्रिभुज की रचना करना **पृष्ठ संख्या : 17–20**

संख्यिकी (Statistics) :



इस भाग (Level–2) को हल करने के लिए इसे निश्चित दिनों में नहीं बांटा गया है। कारण सिर्फ इतना है कि हर बच्चे के सीखने की गति अलग–अलग होती है। चूँकि यह परीक्षा में आनेवाले पाठ्यक्रम पर आधारित है, इसलिए आदर्श रूप में ज़्यादा से ज़्यादा बच्चे पूरी अभ्यास पुस्तिका को अच्छे ढंग से कर पाएँ, यह उनसे अपेक्षित है। बच्चे वर्कशीट हल करने के लिए शिक्षक और अपने दोस्तों की मदद ले सकते हैं। ध्यान रहे कि जो बच्चे आधारभूत दक्षताएँ प्राप्त कर चुके हैं उनसे केवल Level–2 की गतिविधियाँ कराएँ।

आओ सोचें और हल करें

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें। क)

```
  6 3
+ 3 4
-----
```

हलः बच्चो, इस सवाल में जोड़ना की क्रिया करनी है, यह क्रिया किस ओर से होगी?

दाईं ओर से यानि इकाई की ओर से।

```
 द0 इ0
  6 3
+ 3 4
    7
```

इकाई के अंक 3 और 4 को जोड़ने से 7 इकाई होगा।

```
 द0 इ0
  6 3
+ 3 4
  9 7
```

अब 6 दहाई और 3 दहाई को जोड़ते हैं तो 9 दहाई आता है।

(यहाँ 6 और 3 का जोड़ना नहीं है, बल्कि 6 दहाई और 3 दहाई को जोड़ते हैं।)

अर्थात् 63 और 34 को जोड़ने से

63 + 34 = 97 होगा।

ख) चिन्हों को समझते हुए हल करें।

```
  9 9
– 5 3
-----
```

हलः

बच्चो, इस सवाल में घटाने की क्रिया किस ओर से होगी?

दाईं ओर से यानि इकाई की ओर से।

```
 द0 इ0
  9 9
– 5 3
    6
```

इकाई के अंक 9 में से 3 घटाने पर 6 इकाई होगा।

```
 द0 इ0
  9 9
– 5 3
  4 6
```

अब 9 दहाई में से 5 दहाई घटाते हैं तो 4 दहाई आता है।

अर्थात् 99 में से 53 घटाने पर 46 होगा।

99 – 53 = 46

प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए हल करें। क)

```
  4 5 8
+ 2 9 8
-------
```

हलः हम सभी को मालूम है कि जोड़ की क्रिया हमेशा इकाई की ओर से ही करते हैं।

```
सै0 द0 इ0
     1
  4 5 8
+ 2 9 8
      6
```

सबसे पहले हम इकाई को इकाई के साथ जोड़गें। यानि 8 इकाई में 8 इकाई जोड़ने पर 16 इकाई होगा जिसमें 1 दहाई और 6 इकाई होंगे। तो 6 इकाई को इकाई के नीचे लिखेंगे और 1 दहाई को ऊपर लिख लेते हैं।

```
सै0 द0 इ0
  1 1
  4 5 8
+ 2 9 8
    5 6
```

अब 5 दहाई को 9 दहाई के साथ जोड़ने पर 14 दहाई होंगे। जिसमें 1 दहाई पहले से ही है। अतः कुल 15 दहाई होंगे। जहाँ 5 दहाई और 1 सैकड़ा होगा। इसलिए 5 दहाई को नीचे लिखेंगे तथा 1 सैकड़ा को सैकड़े में ऊपर लिखेंगे।

```
सै0 द0 इ0
  1 1
  4 5 8
+ 2 9 8
  7 5 6
```

इसी प्रकार 4 सैकड़े को 2 सैकड़े के साथ जोड़ने पर 6 सैकड़ा हुआ तथा 1 सैकड़ा पहले से ही है। इसलिए कुल 7 सैकड़ा प्राप्त होगा। अतः सैकड़ा के नीचे 7 लिखेंगे।

```
सै0 द0 इ0
  4 5 8
+ 2 9 8
  7 5 6
```

ऐसे सवालों को हल करते समय इकाई का दहाई में बदलना और दहाई का सैकड़े में बदलना कब होता है यह हमें ध्यान रखने की ज़रूरत है। इस पर अपने दोस्तों से चर्चा कर सकते हैं।

अंत में 458 को 298 से जोड़ने पर 756 प्राप्त होगा।

458 + 298 = 756

आओ सोचें और हल करें

ख) तीन अंकों की संख्या का हासिल घटाव

```
  4 5 0
– 2 6 7
  _____
```

हलः

इस सवाल को हल करने के लिए संख्या के किस स्थान से क्रिया शुरू करेंगे?

आइए, इकाई के स्थान से घटाने की क्रिया करते हैं।

```
सै0 द0 इ0
  4 10
 4 5 0
– 2 6 7
      3
```

0 में से 7 इकाई नहीं घटेगा। तो 5 दहाई में से 1 दहाई लेकर 10 इकाई में बदलेंगे। 10 इकाई में से 7 इकाई घटाने पर 3 इकाई बचेगा।

```
सै0 द0 इ0
 3 14
 4 5 0
– 2 6 7
    8 3
```

अब 4 दहाई में से 6 दहाई नहीं घटाया जा सकता है।

तो 4 सैकड़ा में से 1 सैकड़ा लेंगे और 1 सैकड़ा को 10 दहाई बनायेंगे।

```
सै0 द0 इ0
 3
 4 5 0
– 2 6 7
  1 8 3
```

अब 10 दहाई और 4 दहाई यानि 14 दहाई में से 6 दहाई निकालेंगे तो 8 दहाई बचेगा।

अब शेष 3 सैकड़ा में से 2 सैकड़ा घटाने पर 1 सैकड़ा बचेगा।

अर्थात् 450 – 267 = 183

प्र0 3. क) चिन्हों को समझते हुए हल करें।

```
  8 5
× 7
_____
```

हलः 2 अंकों की संख्या का 1 अंक से गुणा

इस सवाल में भी गुणा की क्रिया इकाई अंक से शुरू होगी क्या? – जी हाँ।

तो गुणा की क्रिया शुरू करते हैं।

```
द0 इ0
 8 5          5
×  7       ×  7
 3 5  <--   3 5
```

5 इकाई का 7 इकाई से गुणा = 3 दहाई 5 इकाई

```
सै0 द0 इ0
    8  5          8 0
 ×     7        × 7
    3  5        5 6 0
+ 5 6  0
```

अब, 8 दहाई का 7 इकाई से गुणा = 5 सैकड़ा 6 दहाई

अब जोड़ते हैं –

```
सै0 द0 इ0
    8  5          8  5
 ×     7        ×    7
    3  5        5  9  5
+ 5 6  0
  5 9  5
```

अर्थात् 85 × 7 = 595

ख) 5) 4 7 9 (

हलः भाग की क्रिया बाईं ओर के स्थान वाले अंक से शुरू करते हैं, जिसका स्थानीय मान सबसे अधिक है।

```
सै0 द0 इ0
     0
5 ) 4 7 9 (
   –0
    4
```

सबसे पहले 4 सैकड़े को 5 लोगों में बराबर बाँटना है। नहीं बाँट सकते इसलिए '0' बार भाग करेंगे।

अब 4 सैकड़े को दहाई में बदल लिया और 7 दहाई पहले से है। अब कुल 47 दहाई हो गई तो 47 में 5 का भाग करने पर 5 का पहाड़ा 9 बार 45 होगा। 47 में से 45 कम करने पर 2 प्राप्त हुआ।

```
सै0 द0 इ0
   0 9 5
5 ) 4 7 9 (
   –0
    4 7
   –4 5
    0 2 9
    – 2 5
      0 4
```

अब 2 दहाई को इकाई में बदलने पर 20 इकाई होंगे तथा 9 इकाई पहले से ही है। तो कुल 29 इकाई हो गए। अब 5 का भाग करने पर 5 का पहाड़ा 5 बार 25 होगा। 29 में से 25 कम करने पर शेषफल 4 प्राप्त हुआ।

अर्थात् 479 ÷ 5 की क्रिया में भागफल = 95 और शेषफल = 4।

Level-1

आओ सोचें और हल करें

प्र0 4. मंजू के पास 78 रुपये हैं। यदि संजू ने मंजू को 63 रुपये और दे दिये तो बताएँ मंजू के पास कितने रुपये हो गये?

हल: इस सवाल में, मंजू के पास 78 रुपये हैं तथा संजू ने मंजू को 63 रुपये और दे दिया।

सवाल में क्या पूछा है?

मंजू के पास कितने रुपये हो गये?

तो क्या करना होगा? जोड़ना होगा?

```
सै0 द0 इ0
     1
     7 8
  +  6 3
  ------
       1
```

जोड़ने की क्रिया इकाई के अंक से होगी।

8 इकाई में 3 इकाई जोड़ने से 1 इकाई और 1 दहाई प्राप्त होगा।

प्राप्त हुए 1 दहाई को दहाई के साथ रखकर जोड़ेंगे तो 1 दहाई, 7 दहाई और 6 दहाई को जोड़ने से 1 सैकड़ा और 4 दहाई प्राप्त होगा।

```
सै0 द0 इ0
   1 1
     7 8
  +  6 3
  ------
   1 4 1
```

अर्थात् 78 + 63 = 141

यानि मंजू के पास 141 रुपये हो गये।

प्र0 5. 75 रुपये में से 39 रुपये कम करने पर कितने रुपये बचेंगे?

हल: इस सवाल में कम करने का मतलब है घटाना यानि घटाव की क्रिया होगी।

```
 द0 इ0
  6 15
  7̶ 5̶
+ 3 9
------
    6
```

यानि 5 इकाई में से 9 इकाई घटाना है, जो घटाया नहीं जा सकता।

तो 7 दहाई में से 1 दहाई लेकर 10 इकाई में बदलेंगे।

अब 10 इकाई और पहले की 5 इकाई मिलाएँगे तो 15 इकाई हो जाएगी।

15 इकाई में से 9 इकाई घटायेंगे तो 6 इकाई बचेगा।

```
 द0 इ0
  6 15
  7̶ 5̶
+ 3 9
------
  3 6
```

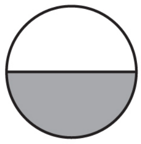
अब बचे 6 दहाई में से 3 दहाई घटायेंगे तो 3 दहाई बचेगा।

अर्थात्

75 में से 39 घटाने पर 36 बचेगा।

प्र0 6. छायांकित भाग को भिन्न के रूप में लिखें।

हल:



इस आकृति में एक वस्तु को कितने बराबर भागों में बाँटा है गया? – 2 बराबर भाग में

ऐसे ही 2 बराबर भाग में से कितने भाग छायांकित है? – 1 भाग

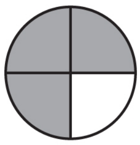
यानि लिया गया भाग = 2

और छायांकित/लिया गया भाग = 1

इस भाग को अगर हमें भिन्न के रूप में लिखना हो तो हम इस प्रकार से लिखेंगे :

$$\text{भिन्न} = \frac{\text{छायांकित/लिया गया भाग}}{\text{किया गया भाग}}$$

$$\text{भिन्न} = \frac{1}{2}$$



इसी प्रकार एक दूसरी आकृति लेते हैं जिसके 4 समान भाग किये और 3 भाग को छायांकित किया। तो उसे हम भिन्न में इस प्रकार लिखेंगे :

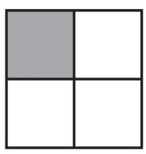
$$\text{भिन्न} = \frac{\text{छायांकित/लिया गया भाग}}{\text{किया गया भाग}}$$

$$\text{भिन्न} = \frac{3}{4}$$

ध्यान रखें – किसी वस्तु का किया गया सभी भाग बराबर होना ज़रूरी है।

प्र0 7. बिना छायांकित भाग को भिन्न के रूप में लिखें।

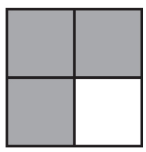
हल:



आकृति में बिना रंगा भाग = 3

किये गये भाग = 4

$$\therefore \text{भिन्न} = \frac{\text{बिना रंगा भाग}}{\text{किया गया भाग}} = \frac{3}{4}$$



इसी प्रकार दूसरी आकृति का

बिना रंगा भाग = 1

किया गया भाग = 4

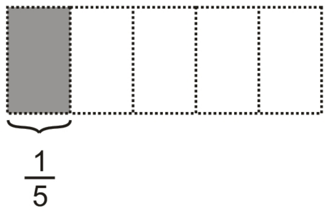
$$\text{भिन्न} = \frac{\text{बिना रंगा भाग}}{\text{किया गया भाग}} = \frac{1}{4}$$

आओ सोचें और हल करें

प्र0 8. नीचे दिए गए भिन्नों की आकृति (चित्र) बनाएँ।

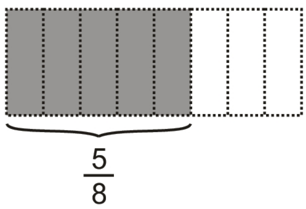
क) $\frac{1}{5}$

हलः



हमने एक वस्तु ली जिसके 5 समान हिस्से करे। तथा ऐसे ही 1 भाग छायांकित किया तो भिन्न रूप में इसे हम $\frac{1}{5}$ लिखेंगे और $\frac{1}{5}$ को आकृति के रूप में इस प्रकार दर्शाते हैं।

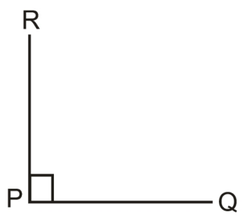
ख) $\frac{5}{8}$



हमने एक अन्य वस्तु ली जिसके 8 समान हिस्से करे। तथा ऐसे ही 5 भाग छायांकित किया तो भिन्न रूप में इसे हम लिखेंगे $\frac{5}{8}$ और $\frac{5}{8}$ को आकृति के रूप में इस प्रकार दर्शाते हैं।

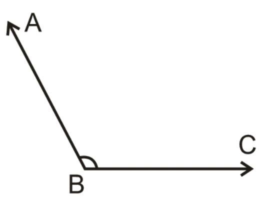
प्र0 9. नीचे दिए गए कोणों की माप का अंदाज़ा लगाकर माप के अनुसार मिलान करें और उनके नाम भी लिखें।

हलः



इस आकृति में, आधार PQ के P बिन्दु पर लम्ब RP इस प्रकार खड़ी है जैसे समकोण यानि 90° का कोण बना रही है। अर्थात् $\angle RPQ = 90°$

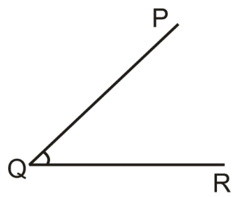
जो समकोण के बराबर है।



इस आकृति में, आधार BC के B बिन्दु पर रेखाखण्ड AB इस प्रकार झुकाव बनाती है, जो 90° से अधिक अंश के कोण के समान है।

अर्थात् $\angle ABC = \angle B > 90°$

जो अधिककोण है।

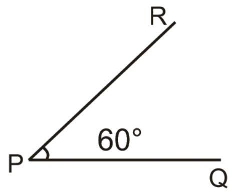


इस आकृति में, आधार QR के बिन्दु Q पर रेखाखण्ड PQ इस प्रकार झुकाव बनाती है, जो 90° से कम अंश के कोण के समान है।

अर्थात् $\angle PQR = \angle Q < 90°$

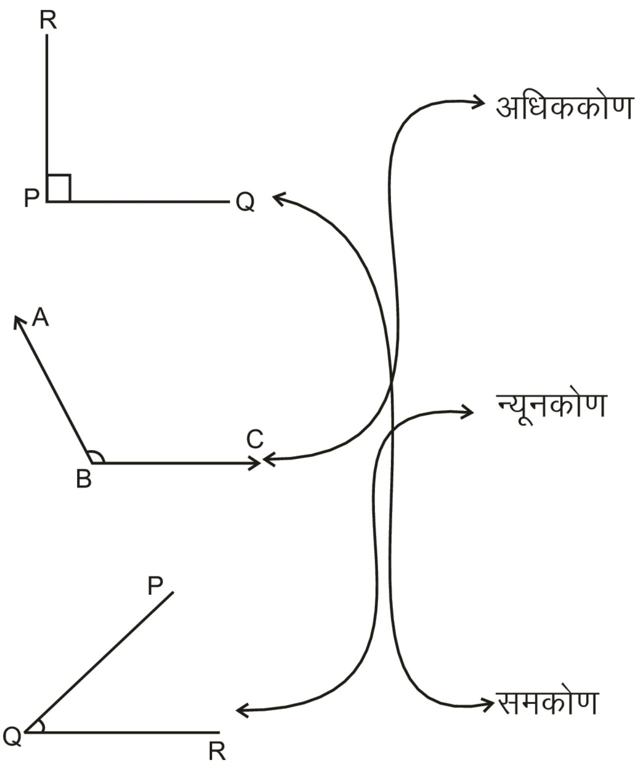
जो न्यूनकोण है।

– क्षैतिज तल पर खींचे गये रेखाखण्ड को प्रायः आधार से जाना जाता है।
– किसी आकृति में, दो रेखाखण्ड या भुजाओं के उभयनिष्ठ बिन्दु पर उत्पन्न झुकाव कोण के रूप में जाना जाता है।



यहाँ रेखाखण्ड PQ आधार के रूप में है तथा $\angle RPQ = 60°$, जो बिन्दु P पर रेखाखण्ड RP और PQ के झुकाव से बना है।

मिलान करें।



आओ सोचें और हल करें

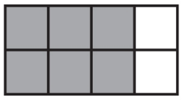
S-1.1

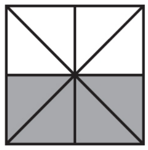
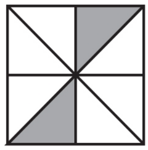
प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

89 + 67	75 + 78	70 − 59	85 − 58	85 × 7	97 × 6	2) 21 (	6) 82 (

प्र0 2. आपके पास 15 क़लम है। राहुल ने 12 क़लम आपको और दे दिये तो आपके पास कितनी क़लम हो गई?

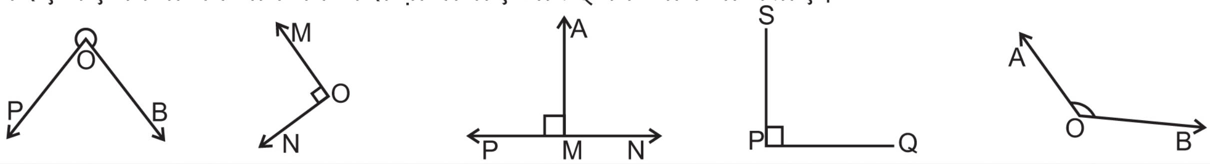
प्र0 3. 365 रुपये में एक रेडियो बेचने पर मदन को 225 रुपये का घाटा (हानि) हुआ। बताएँ, मदन ने रेडियो कितने रुपये में ख़रीदा था?

प्र0 4. दी गई आकृतियों में छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें। (क)  (ख)

प्र0 5. दी गई आकृतियों के बिना रंगे हुए भागों को भिन्न के रूप में लिखें। (क)  (ख) 

प्र0 6. दिए गए भिन्नों की आकृति (चित्र) बनाएँ। (क) $\frac{3}{6}$ (ख) $\frac{6}{7}$ (ग) $\frac{4}{7}$ (घ) $\frac{5}{13}$

प्र0 7. दिए गए कोणों की माप का अंदाज़ा लगाएँ और इनके नाम भी बताएँ।



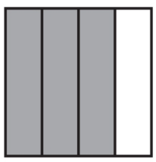
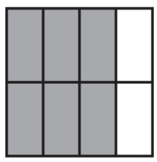
S-1.2

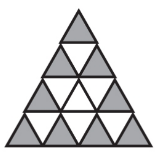
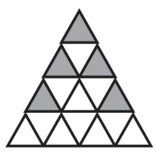
प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

76 + 22	458 + 298	84 − 47	549 − 374	79 × 6	545 × 9	8) 98 (	6) 863 (

प्र0 2. एक गाँव में 20 गाय थीं। वहाँ 35 गाय और आ गईं अब उस गाँव में कुल मिलाकर कितनी गायें हो गईं?

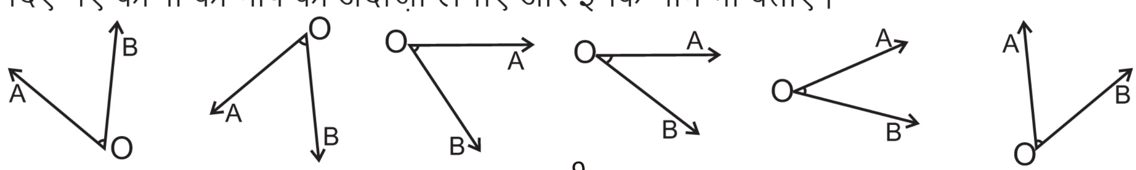
प्र0 3. टोकरी में 42 केले थे। उसमें से 20 केले बेच दिए तो टोकरी में कितने केले बच गए?

प्र0 4. दी गई आकृतियों में छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें। (क)  (ख) 

प्र0 5. दी गई आकृतियों के बिना रंगे हुए भागों को भिन्न के रूप में लिखें। (क)  (ख) 

प्र0 6. दिए गए भिन्नों की आकृति (चित्र) बनाएँ। (क) $\frac{6}{7}$ (ख) $\frac{12}{17}$ (ग) $\frac{9}{14}$ (घ) $\frac{3}{13}$

प्र0 7. दिए गए कोणों की माप का अंदाज़ा लगाएँ और इनके नाम भी बताएँ।



आओ सोचें और हल करें

S-1.3

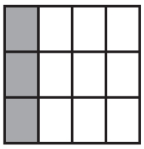
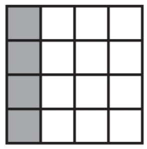
प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

$\begin{array}{r} 89 \\ +79 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 385 \\ +203 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 93 \\ -69 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 367 \\ -245 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 64 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 446 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ 4) 57 ($\quad$ 5) 109 (

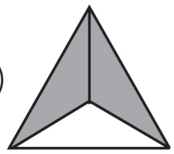
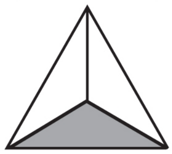
प्र0 2. मेरे पास 45 कप थे। 37 कप मैं और ले आया, तो अब मेरे पास कितने कप हो गए?

प्र0 3. 750 रुपये में एक घड़ी बेचने पर गौरव को 375 रुपये का फ़ायदा (लाभ) हुआ। बताएँ, गौरव ने घड़ी कितने रुपये में ख़रीदी थी?

प्र0 4. दी गई आकृतियों में छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें।

(क)  (ख) 

प्र0 5. दी गई आकृतियों के बिना रंगे हुए भागों को भिन्न के रूप में लिखें।

(क)  (ख) 

प्र0 6. दिए गए भिन्नों की आकृति (चित्र) बनाएँ। (क) $\frac{12}{17}$ (ख) $\frac{7}{11}$ (ग) $\frac{5}{17}$ (घ) $\frac{3}{13}$

प्र0 7. दिए गए कोणों की माप का अंदाज़ा लगाएँ और इनके नाम भी बताएँ।

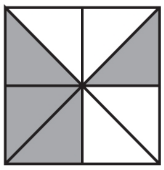
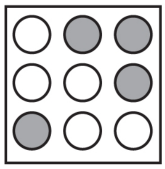
S-1.4

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

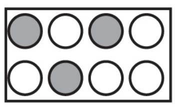
$\begin{array}{r} 99 \\ +58 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 973 \\ +862 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 70 \\ -68 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 325 \\ -509 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 80 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 502 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ 7) 97 ($\quad$ 8) 976 (

प्र0 2. राम के पास 345 रुपये थे। उसके पिताजी ने उसे 257 रुपये और दे दिये। बताएँ, राम के पास अब कितने रुपये हो गए?

प्र0 3. 428 अण्डों में से 312 अण्डे ख़राब हो गए। बताएँ, कितने अण्डे सही बचे?

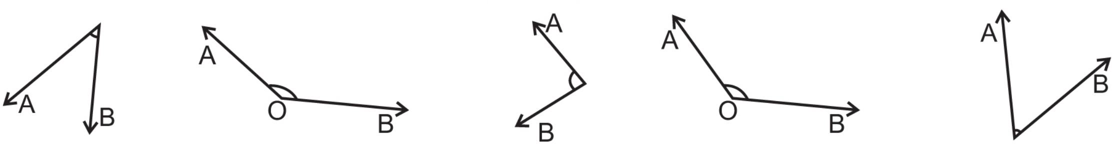
प्र0 4. दी गई आकृतियों में छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें। (क)  (ख) 

प्र0 5. दी गई आकृतियों के बिना रंगे हुए भागों को भिन्न के रूप में लिखें।

(क) (ख) 

प्र0 6. दिए गए भिन्नों की आकृति (चित्र) बनाएँ। (क) $\frac{7}{9}$ (ख) $\frac{6}{11}$ (ग) $\frac{9}{17}$ (घ) $\frac{5}{13}$

प्र0 7. दिए गए कोणों की माप का अंदाज़ा लगाएँ और इनके नाम भी बताएँ।



आओ सोचें और हल करें

प्र0 1. क) चिन्हों को समझते हुए हल करें।

$$\begin{array}{r} 89 \\ +\ \square \\ \hline 150 \end{array}$$

हल:

इस प्रश्न में क्या दिया गया है? पहली संख्या 89 में एक ऐसी कोई संख्या जोड़ें जिससे योगफल 150 हो जाए।

दिए गए प्रश्न को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$89 + \square = 150$

दोनों पक्षों मे से 89 घटाने पर

$-89 + 89 + \square = 150 - 89$

89 में से 89 कम करने पर शून्य होगा। → $0 + \square = 150 - 89$

150 में से 89 कम करने पर 61 प्राप्त होगा। → $\square = 61$

$$\text{उत्तर} = \begin{array}{r} 89 \\ +\ \boxed{61} \\ \hline 150 \\ \hline \end{array}$$

ख)

$$\begin{array}{r} 79 \\ -\ \square \\ \hline 50 \\ \hline \end{array}$$

इस प्रश्न में क्या दिया गया है? पहली संख्या 79 में एक ऐसी कोई संख्या घटाएँ जिससे 50 हो जाए।

दिए गए प्रश्न को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$79 - \square = 50$

दोनों पक्षों मे से 79 घटाने पर

$-79 + 79 - \square = 50 - 79$

79 में से 79 कम करने पर शून्य होगा। → $0 - \square = 50 - 79$

50 में से 79 कम करने पर –29 प्राप्त होगा। → $\square = -29$

अब दोनों पक्षों में (–1) से गुणा करने पर

$(-1) \times (-\square) = (-1) \times (-29)$

$\square = 29$

(–1) को –□ गुणा करने पर □ प्राप्त होगा।

(–1) को –29 गुणा करने पर 29 प्राप्त होगा।

$$\text{उत्तर} = \begin{array}{r} 79 \\ -\ \boxed{29} \\ \hline 50 \\ \hline \end{array}$$

प्र0 2. क) चिन्हों को समझते हुए हल करें।

$$\begin{array}{r} 226 \\ +\ \square \\ \hline 597 \\ \hline \end{array}$$

हल: इस प्रश्न में क्या दिया गया है?

पहली संख्या 226 में एक ऐसी कोई संख्या जोड़ें जिससे योगफल 597 हो जाए।

दिए गए प्रश्न को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$226 + \square = 597$

दोनों पक्षों मे से 226 घटाने पर

$-226 + 226 + \square = 597 - 226$

$0 + \square = 597 - 226$

$\square = 371$

$$\text{उत्तर} = \begin{array}{r} 226 \\ +\ \boxed{371} \\ \hline 597 \\ \hline \end{array}$$

ख)

$$\begin{array}{r} 504 \\ -\ \square \\ \hline 207 \\ \hline \end{array}$$

इस प्रश्न में क्या दिया गया है? पहली संख्या 504 में एक ऐसी कोई संख्या घटाएँ जिससे 207 हो जाए।

दिए गए प्रश्न को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$504 - \square = 207$

दोनों पक्षों मे से 504 को घटाने पर

$-504 + 504 - \square = 207 - 504$

$0 - \square = 207 - 504$

$-\square = -297$

दोनों तरफ (–1) से गुणा करने पर

$(-1) \times (-\square) = (-1) \times (-297)$

$\square = 297$

$$\text{उत्तर} = \begin{array}{r} 504 \\ -\ \boxed{297} \\ \hline 207 \\ \hline \end{array}$$

आओ सोचें और हल करें

प्र0 3. क) चिन्हों को समझते हुए हल करें।

$$\begin{array}{r} 3\ 9 \\ \times\ 2\ 3 \\ \hline \end{array}$$

हल:

दिए गए प्रश्न को हम इस तरह भी लिख सकते हैं।

$$\begin{array}{rrr} सै0 & द0 & इ0 \\ & 2 & \\ & 3 & 9 \\ \times & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 7 \end{array}$$

सबसे पहले 3 इकाई का गुणा 9 इकाई में करेंगे। 3 का पहाड़ा 9 बार मतलब 27 इसलिए इकाई के नीचे 7 लिखेंगे और 2 दहाई को उपर लिखते हैं। अब 3 को 3 दहाई से गुणा करेंगे 3, 3 बार मतलब 9 दहाई, 2 दहाई पहले से है उसे भी जोड़ लेंगे 11 दहाई हुई। मतलब 1 सैकड़ा और 1 दहाई होंगे।

$$\begin{array}{rrr} सै0 & द0 & इ0 \\ 1 & 2 & \\ & 3 & 9 \\ \times & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 7 \\ +\ 7 & 8 & 0 \\ \hline 8 & 9 & 7 \\ \hline \end{array}$$

अब 2 दहाई का गुणा 9 इकाई में करेंगे। 2 का पहाड़ा 9 बार मतलब 1 सैकड़ा और 8 दहाई होगा। दहाई के नीचे 2 लिखेंगे और 1 सैकड़े को उपर लिखेंगे। 2 दहाई का गुणा 3 दहाई से करेंगे। 2, 3 बार 6 मतलब 6 सैकड़ा और एक सैकड़ा पहले से है। अतः 7 सैकड़ा हो गए। अब सभी को मिलाकर जोड़ने पर 897 प्राप्त हुए।

ख) 15) 8 8 (

दिए गए प्रश्न को हम इस तरह भी लिख सकते हैं।

$$\begin{array}{rl} & द0\ इ0 \\ & \ \ 0 \\ 15 &)\ 8\ 8\ (\\ & -0 \downarrow \\ \hline & \ \ 8\ 8 \end{array}$$

भाग करते समय हर एक इकाई को बाँटना जरूरी है।

सबसे पहले 8 दहाई को 15 लोगों में बराबर बाँटना है। नहीं बाँट सकते इसलिए '0' बार भाग करेंगे।

अब 8 दहाई को इकाई में बदल लिया और 8 इकाई पहले से है। अब कुल 88 इकाई हो गई तो 88 में 15 का भाग करने पर 15 का पहाड़ा 5 बार 75 होगा। 88 में से कम किया शेषफल 13 प्राप्त हुआ। इसलिए 88 को 15 से भाग करने पर भागफल 5 तथा शेषफल 13 प्राप्त होगा।

$$\begin{array}{rl} & द0\ इ0 \\ & \ \ 0\ \ 5 \\ 15 &)\ 8\ 8\ (\\ & -0 \downarrow \\ \hline & \ \ 8\ 8 \\ & -\ 7\ 5 \\ \hline & \ \ 1\ 3 \\ \hline \end{array}$$

प्र0 4. अमित ने 20 रुपये प्रति कि.ग्रा. के भाव से 15 कि.ग्रा. आम ख़रीदे। बताएँ अमित ने दुकानदार को कितने रुपये दिए?

हल: यह पता करने के लिए हमें गुणा की क्रिया करनी होगी। यानि 20 में 15 का गुणा करना होगा।

$$\begin{array}{rrr} सै0 & द0 & इ0 \\ & 2 & 0 \\ \times & 1 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}$$

5 इकाई का गुणा 0 इकाई से किया, फिर 5 इकाई का गुणा 2 दहाई से किया जिसमें 1 सैकड़ा प्राप्त हुआ। अब 1 दहाई का गुणा 0 इकाई में करेंगे तो 0 दहाई और 0 इकाई प्राप्त हुआ।

$$\begin{array}{rrr} सै0 & द0 & इ0 \\ & 2 & 0 \\ \times & 1 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ +\ 2 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

1 दहाई का गुणा 2 दहाई से किया तो 20 दहाई प्राप्त हुआ इसका मतलब 2 सैकड़ा होगा। सैकड़े के लिए 2 लिखेंगे। अब सभी को जोड़ लेगें तो 300 प्राप्त होगा।

अतः अमित ने 15 किलो आम 300 रुपये में ख़रीदे।

प्र0 5. 5 किताबों की क़ीमत 255 रुपये है तो एक किताब की क़ीमत क्या होगी?

हल: यह पता करने के लिए 255 में 5 का भाग करना होगा।

$$\begin{array}{rl} & सै0\ द0\ इ0 \\ & \ \ 0 \\ 5 &)\ 2\ 5\ 5\ (\\ & -0 \\ \hline & \ \ 2 \end{array}$$

सबसे पहले सैकड़ा को बांटेंगे। 2 सैकड़ा 5 से भाग नहीं जा सकता इसलिए '0' बार भाग करेंगे।

दो सैकड़ा को दहाई में बदल लिया तो 20 दहाई हो गए और 5 दहाई पहले से है। कुल 25 दहाई हुई, 25 दहाई को बाँट सकते हैं। 5 का पहाड़ा 5 बार 25 होगा।

$$\begin{array}{rl} & सै0\ द0\ इ0 \\ & \ \ 0\ \ 5\ \ 1 \\ 5 &)\ 2\ 5\ 5\ (\\ & -0 \\ \hline & \ \ 2\ 5 \\ & -\ 2\ 5 \\ \hline & \ \ 0\ 0\ 5 \\ & \qquad -\ 5 \\ \hline & \qquad\ \ 0 \end{array}$$

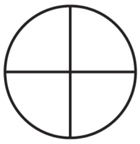
अब इकाई 5 में भाग करेंगे 5, एक बार 5 शेषफल 0 होगा।

अतः एक किताब की क़ीमत 51 रुपये होगी।

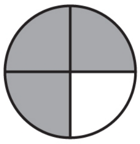
आओ सोचें और हल करें

प्र0 6. दी गई भिन्न $\frac{3}{4}$ की आकृति (चित्र) बनाएँ।

हल:



दिए गए भिन्न के अनुसार हमने एक रोटी ली और उसके 4 समान भाग किए।

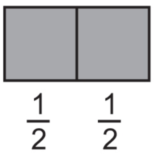


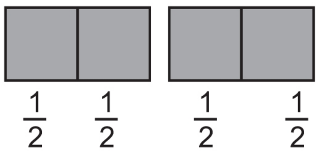
अब ऐसे ही 3 भाग चुन लिया है।

अतः $\frac{3}{4}$ को हम इस प्रकार से दर्शाते हैं।

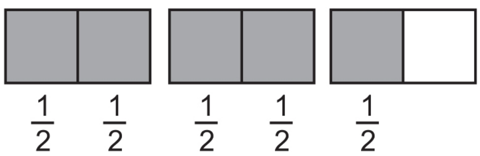
प्र0 7. नीचे दी गई भिन्न $\frac{5}{2}$ की आकृति बनाएँ और मिश्र / मिश्रित भिन्न में लिखें।

हल: इसका मतलब किसी वस्तु के किए गए 2 समान भाग से ऐसे ही 5 भाग चाहिए। इसलिए उस वस्तु के 2 भाग किए और ऐसे ही 2 भाग चुन लिया है। लेकिन ऐसे 5 भाग चाहिए लेकिन इसमें से 5 भाग नहीं ले सकते है तो ऐसी ही दूसरी वस्तु लेनी पड़ेगी।

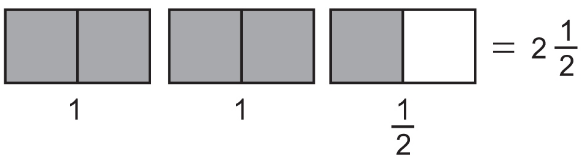




अभी 4 भाग हो गए इसी प्रकार एक वस्तु लेना होगा।



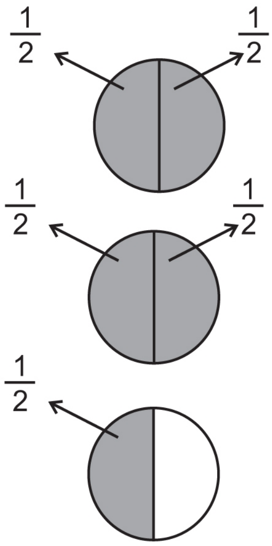
अब यहाँ देखते हैं कि 2 भाग पूर्ण और एक भाग अपूर्ण है।



$\frac{5}{2}$ का मिश्र भिन्न $2\frac{1}{2}$ है

प्र0 8. दी गई भिन्न $\frac{3}{2}$ की आकृति (चित्र) बनाएँ।

हल:



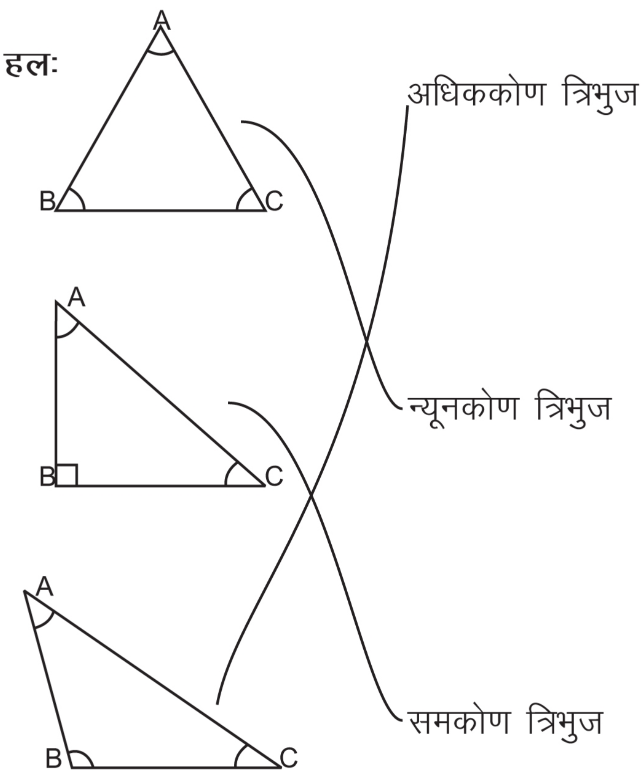
दिए गए भिन्न के अनुसार किया गया भाग दो है। इसलिए एक रोटी को 2 भाग किए और ऐसे ही 3 भाग चाहिए।

अभी ऐसे ही एक भाग और चाहिए। इसलिए इसी आकार की ऐसी ही दूसरी रोटी लेकर 2 समान भाग किए और 1 भाग चुन लिया।

अतः $\frac{3}{2}$ को हम इस रूप में दर्शाएगें जिसका एक भाग पूरा– पूरा लिया और दूसरे से $\frac{1}{2}$ भाग लिया।

प्र0 9. दिए गए त्रिभुज के मिलान करें और विशेषता लिखें।

हल:



आओ सोचें और हल करें

S-2.1

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

$$58 + \square = 92 \qquad 128 + \square = 957 \qquad 87 - \square = 23 \qquad 862 - \square = 209$$

$$37 \times 58 \qquad 567 \times 8 \qquad 15\overline{)69} \qquad 17\overline{)424}$$

प्र0 2. एक खिलौने की क़ीमत 45 रुपये है। ऐसे ही 17 खिलौनों की क़ीमत क्या होगी?

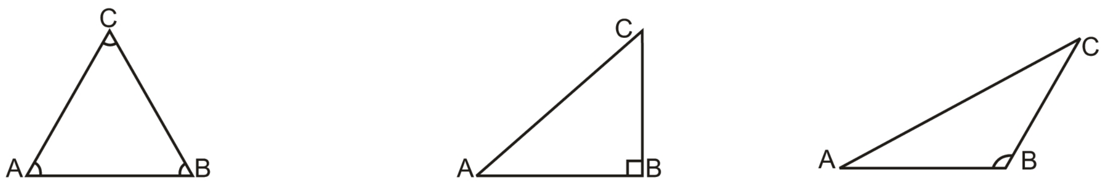
प्र0 3. 15 किताबों की क़ीमत 960 रुपये है तो बताएँ 1 किताब की क़ीमत क्या होगी?

प्र0 4. दिए गए भिन्नों की आकृतियाँ बनाएँ : (क) $\frac{1}{4}$ (ख) $\frac{1}{2}$ (ग) $\frac{3}{8}$ (घ) $\frac{2}{7}$

प्र0 5. दिए गए भिन्नों की आकृतियाँ बनाएँ : (क) $\frac{3}{2}$ (ख) $\frac{4}{3}$ (ग) $\frac{5}{2}$ (घ) $\frac{7}{5}$

प्र0 6. दिए गए भिन्नों में विषम/अनुचित भिन्नों की आकृति बनाएँ और मिश्र भिन्न में लिखें। (क) $\frac{7}{2}$ (ख) $\frac{5}{2}$ (ग) $\frac{8}{3}$ (घ) $\frac{7}{5}$

प्र0 7. दिए गए त्रिभुज के नाम और उनकी विशेषता लिखें। (भुजाओं के आधार पर)



S-2.2

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

$$24 + \square = 82 \qquad 532 + \square = 859 \qquad 95 - \square = 32 \qquad 932 - \square = 325$$

$$58 \times 25 \qquad 692 \times 7 \qquad 12\overline{)78} \qquad 18\overline{)532}$$

प्र0 2. एक क़लम का मूल्य 75 रुपये है। ऐसी ही 13 क़लमों का मूल्य कितना होगा?

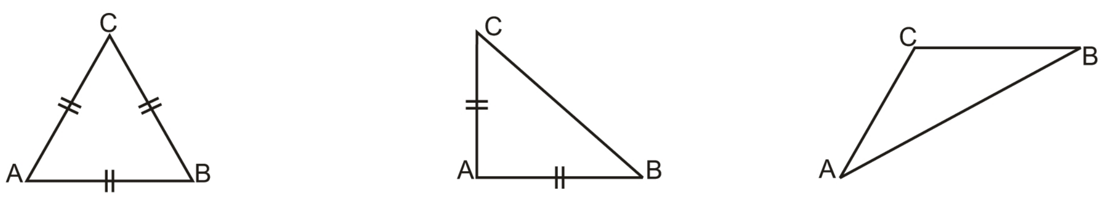
प्र0 3. राम के पास 303 सेब हैं। श्याम ने उसे 209 सेब और दे दिए। राम ने उन सेबों को अपने 16 दोस्तों में बराबर–बराबर बाँट दिया तो बताएँ प्रत्येक दोस्त को कितने–कितने सेब मिलेंगे?

प्र0 4. दिए गए भिन्नों की आकृतियाँ बनाएँ : (क) $\frac{1}{3}$ (ख) $\frac{2}{5}$ (ग) $\frac{4}{5}$ (घ) $\frac{5}{6}$

प्र0 5. दिए गए भिन्नों की आकृतियाँ बनाएँ : (क) $\frac{4}{3}$ (ख) $\frac{7}{5}$ (ग) $\frac{6}{5}$ (घ) $\frac{9}{4}$

प्र0 6. दिए गए भिन्नों में विषम/अनुचित भिन्नों की आकृति बनाएँ और मिश्र भिन्न में लिखें। (क) $\frac{11}{9}$ (ख) $\frac{7}{3}$ (ग) $\frac{8}{5}$ (घ) $\frac{5}{4}$

प्र0 7. दिए गए त्रिभुज के नाम और उनकी विशेषता लिखें। (भुजाओं के आधार पर)



आओ सोचें और हल करें

S-2.3

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

$22 + \square = 85$ $\quad$ $500 + \square = 982$ $\quad$ $92 - \square = 18$ $\quad$ $702 - \square = 291$ $\quad$ 45×32 $\quad$ 821×9 $\quad$ $16\overline{)90}($ $\quad$ $19\overline{)802}($

प्र0 2. एक ट्रे अंडे की क़ीमत 157 रुपये है। ऐसे ही 35 ट्रे की क़ीमत क्या होगी?

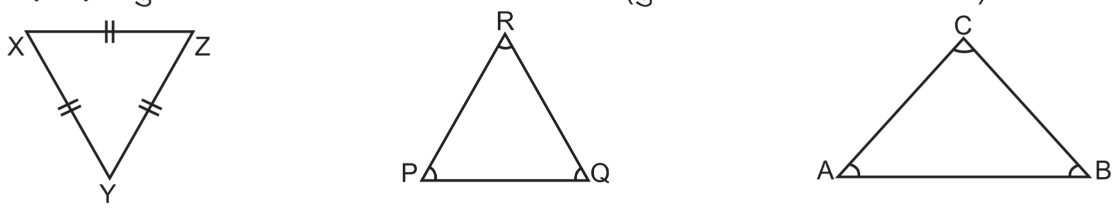
प्र0 3. एक आदमी के पास 54 बैलून थे। 14 बैलून फूट गए। वह आदमी बचे हुए बैलून चार दोस्तों में बराबर–बराबर बाँटना चाहता है तो एक दोस्त को कितने बैलून मिलेंगे?

प्र0 4. दिए गए भिन्नों की आकृतियाँ बनाएँ : (क) $\frac{3}{8}$ (ख) $\frac{9}{12}$ (ग) $\frac{13}{18}$ (घ) $\frac{15}{17}$

प्र0 5. दिए गए भिन्नों की आकृतियाँ बनाएँ : (क) $\frac{13}{12}$ (ख) $\frac{14}{13}$ (ग) $\frac{11}{7}$ (घ) $\frac{9}{8}$

प्र0 6. दिए गए भिन्नों में विषम/अनुचित भिन्नों की आकृति बनाएँ और मिश्र भिन्न में लिखें। (क) $\frac{9}{7}$ (ख) $\frac{11}{13}$ (ग) $\frac{15}{17}$ (घ) $\frac{22}{13}$

प्र0 7. दिए गए त्रिभुज के नाम और उनकी विशेषता लिखें। (भुजा और कोण के आधार पर)



S-2.4

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

$33 + \square = 99$ $\quad$ $500 + \square = 905$ $\quad$ $88 - \square = 15$ $\quad$ $609 - \square = 332$ $\quad$ 39×18 $\quad$ 147×9 $\quad$ $15\overline{)92}($ $\quad$ $12\overline{)808}($

प्र0 2. एक सप्ताह में 7 दिन होते हैं तो 52 सप्ताह में कितने दिन होंगे?

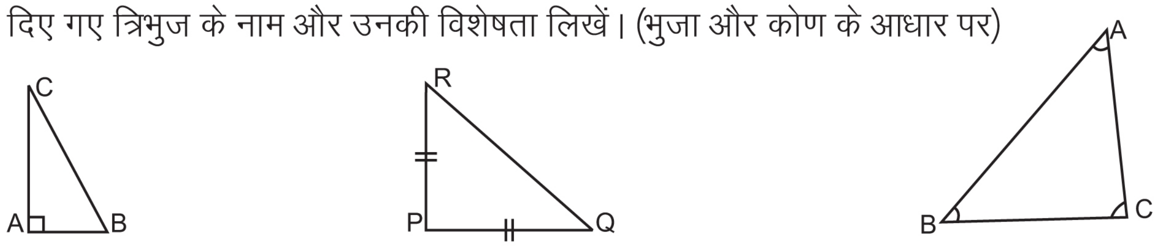
प्र0 3. 672 टॉफ़ियाँ 21 बच्चों में बराबर–बराबर बाँटी गईं। बताएँ, हर एक बच्चे को कितनी टॉफ़ियाँ मिलेंगी?

प्र0 4. दिए गए भिन्नों की आकृतियाँ बनाएँ : (क) $\frac{2}{1}$ (ख) $\frac{3}{10}$ (ग) $\frac{9}{13}$ (घ) $\frac{15}{23}$

प्र0 5. दिए गए भिन्नों की आकृतियाँ बनाएँ : (क) $\frac{11}{2}$ (ख) $\frac{10}{3}$ (ग) $\frac{5}{2}$ (घ) $\frac{11}{7}$

प्र0 6. दिए गए भिन्नों में विषम/अनुचित भिन्नों की आकृति बनाएँ और मिश्र भिन्न में लिखें। (क) $\frac{7}{2}$ (ख) $\frac{11}{5}$ (ग) $\frac{15}{13}$ (घ) $\frac{17}{15}$

प्र0 7. दिए गए त्रिभुज के नाम और उनकी विशेषता लिखें। (भुजा और कोण के आधार पर)



आओ सोचें और हल करें

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

क) 28 + ☐ = 92

हल:

इस प्रश्न में क्या दिया गया है? पहली संख्या 28 में एक ऐसी कोई संख्या जोड़ें जिससे योगफल 92 हो जाए।

28 + ☐ = 92

दिए गए प्रश्न में दोनों पक्षों में से 28 घटाने पर

−28 + 28 + ☐ = 92 − 28

0 + ☐ = 92 − 28

☐ = 64

अत: 28 + 64 = 92

ख) 65 − ☐ = 27

इस प्रश्न में क्या दिया गया है? पहली संख्या 65 में एक ऐसी कोई संख्या घटाएँ जिससे 27 हो जाए।

दिए गए प्रश्न में दोनों पक्षों में से 65 घटाने पर

−65 + 65 + ☐ = 27 − 65

0 + ☐ = 27 − 65

☐ = −38

दोनों तरफ (−1) से गुणा करने पर

(−1) × (−☐) = (−1) × (−38)

☐ = 38

अत: 65 − 38 = 27

प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

क) 692 + ☐ = 875

हल:

इस प्रश्न में क्या दिया गया है? पहली संख्या 692 में एक ऐसी कोई संख्या जोड़ें जिससे योगफल 875 हो जाए।

692 + ☐ = 875

दिए गए प्रश्न में दोनों पक्षों में से 28 घटाने पर

−692 + 692 + ☐ = 875 − 692

0 + ☐ = 875 − 692

☐ = 183

अत: 693 + 183 = 875

ख) 925 − ☐ = 625

इस प्रश्न में क्या दिया गया है? पहली संख्या 925 में एक ऐसी कोई संख्या घटाएँ जिससे 625 हो जाए।

दिए गए प्रश्न में दोनों पक्षों में से 925 घटाने पर

−925 + 925 + ☐ = 625 − 925

0 + ☐ = 625 − 925

☐ = −300

दोनों तरफ (−1) से गुणा करने पर

(−1) × (−☐) = (−1) × (−300)

☐ = 300

अत: 925 − 300 = 625

आओ सोचें और हल करें

प्र0 3. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

क) $25 \times \square = 300$

इस प्रश्न में क्या दिया गया है? पहली संख्या 25 में किस संख्या से गुणा करें ताकि गुणनफल 300 हो जाए।

हलः दिए गए प्रश्न में दोनों पक्षों में 25 से भाग करने पर

$$25 \times \square = 300$$

$$25 \div 25 \times \square = 300 \div 25$$

$$1 \times \square = 300 \div 25$$

$$\square = 12$$

अतः $25 \times 12 = 300$

ख) $625 \div \square = 25$

इस प्रश्न में क्या दिया गया है? पहली संख्या 625 में किस संख्या से भाग करें ताकि भागफल 25 हो जाए।

दिए गए प्रश्न में 625 से दोनों पक्षों में भाग करने पर

$$625 \div 625 \div \square = 25 \div 625$$

$$1 \div \square = 25$$

$$1 \div \square = 1 \div 25$$

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$$\frac{1}{\square} \quad \frac{1}{25}$$

आपस मे तिरछा गुणा करने पर

$$\square \times 1 = 1 \times 25$$

अतः $625 \div \boxed{25} = 25$

प्र0 4. राधा के पास जितने रुपये थे उसके 5 गुने से 44 ज़्यादा किरन के पास हैं। यदि राधा के पास 85 रुपये हैं तो बताएँ किरन के पास कितने रुपये हैं?

हलः प्रश्न में दिया गया है राधा के पास 85 रुपये हैं।

राधा के रुपये का 5 गुना $= 85 \times 5$
$= 425$

किरन के पास राधा के पाँच गुने से 44 रुपये अधिक है इसलिए $85 \times 5 + 44 =$
$425 + 44 = 469$

अतः किरन के पास 469 रुपये हैं।

प्र0 5. एक बस में 98 लोग बैठे थे। दूसरे स्टॉप पर बस से आधे लोग उतर गए और 34 लोग और चढ गए बताएँ बस में अब कितने लोग हैं?

हलः बस में 98 लोग बैठे थे।
दूसरे स्टाप पर आधे लोग उतर गए

$$= \frac{98}{2}$$

= 49 लोग उतर गए।

बस में अब 98 − 49 लोग बचे
= 98 − 49

∴ बस में 44 लोग और आ गए।
= 98 − 49 + 34
= 49 + 34
= 83 लोग

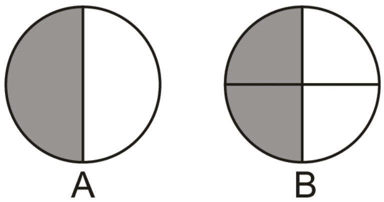
अतः बस में कुल 83 लोग हो गए।

Level-1

आओ सोचें और हल करें

प्र0 6. दिए गए चित्रों को भिन्न रूप में लिखें और तुलना करें।

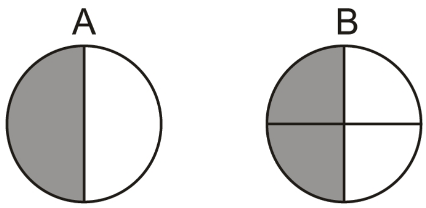
हल: (क)



आकृति A को 2 भाग में बाँटा गया है और 1 भाग छायांकित किया गया है। इसलिए इसे हम $\frac{1}{2}$ लिखेंगे।

आकृति B को 4 भागों में बाँटा गया है और 2 भाग चुना गया है। इसलिए इसे हम $\frac{1}{4}$ लिखेंगे।

अतः



आकृति A और B के छांयाकित भाग की तुलना करने पर आकृति A का छायांकित भाग = आकृति B का छायांकित भाग

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

अतः आकृति A और B के छांयाकित भाग बराबर है।

अतः $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ भिन्न बराबर है।

प्र0 7. दी गई भिन्न $\frac{3}{9}$ के समतुल्य भिन्न लिखें।

हल: $\frac{3}{9}$ के अंश और हर में 2 से गुणा करने पर

$$\frac{3}{9} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{18}$$

$\frac{3}{9}$ के अंश और हर में 3 से गुणा करने पर

$$\frac{3}{9} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{27}$$

अतः $\frac{3}{9}$ के दो समतुल्य भिन्न $\frac{6}{18}$, $\frac{9}{27}$ है।

प्र0 8. दी गई मिश्र भिन्न $9\frac{1}{2}$ को अनुचित (विषम) भिन्न में लिखें।

हल:

$$\text{अनुचित भिन्न} = \frac{\text{भागफल} \times \text{भाजक} + \text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$$

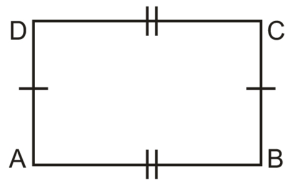
$$\text{या} = \frac{\text{भागफल} \times \text{हर} + \text{अंश}}{\text{भाजक}}$$

$$= \frac{9 \times 2 + 1}{2}$$

$$= \frac{18 + 1}{2}$$

$$\text{उत्तर अनुचित भिन्न} = \frac{19}{2}$$

प्र0 9. क)



हल:

(i) दी गई आकृति ABCD में भुजा = AB = CD है तथा भुजा = BC = भुजा AD

(ii) आकृति ABCD में

$$\angle A = \angle B$$

$$\angle C = \angle D$$

अतः $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

अतः सभी आकृति ABCD के सभी कोण आपस में बराबर हैं।

अतः दी गई आकृति में आमने–सामने की भुजाएँ बराबर है इसलिए आकृति ABCD एक आयत है।

आओ सोचें और हल करें

S-3.1

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

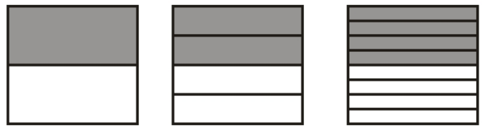
$58 + \square = 85$ $\quad$ $97 - \square = 25$ $\quad$ $88 \times \square = 440$ $\quad$ $492 \div \square = 123$

$32 + \square = 81$ $\quad$ $88 - \square = 24$ $\quad$ $29 \times \square = 261$ $\quad$ $545 \div \square = 109$

प्र0 2. मोहन के वेतन के तिगुने से 48 रुपये अधिक राम का वेतन है। यदि मोहन का वेतन 450 रुपये है तो राम का वेतन कितना होगा?

प्र0 3. रजनी की उम्र उसकी नानी की उम्र की एक तिहाई से 15 ज़्यादा है। यदि उसकी नानी की उम्र 81 वर्ष है, तो रजनी की उर्म क्या होगी?

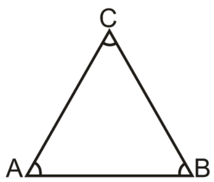
प्र0 4. दिए गए चित्रों को भिन्न के रूप में लिखें और तुलना

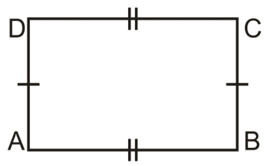


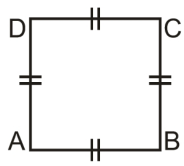
प्र0 5. दिए गए मिश्र भिन्न को अनुचित (विषम) भिन्न में लिखें। (क) $1\frac{1}{2}$ (ख) $5\frac{3}{2}$ (ग) $2\frac{3}{5}$ (घ) $3\frac{5}{7}$

प्र0 6. दिए गए भिन्नों के 3–3 समतुल्य भिन्न लिखें। (क) $\frac{15}{18}$ (ख) $\frac{9}{15}$ (ग) $\frac{12}{20}$ (घ) $\frac{16}{24}$

प्र0 7. दी गई आकृतियों के नाम और उनकी विशेषताएँ लिखें।







S-3.2

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

$44 + \square = 97$ $\quad$ $48 - \square = 12$ $\quad$ $35 \times \square = 420$ $\quad$ $580 \div \square = 116$

$84 + \square = 97$ $\quad$ $94 - \square = 48$ $\quad$ $85 \times \square = 680$ $\quad$ $902 \div \square = 451$

प्र0 2. दिल्ली से पटना का किराया, दिल्ली से अलीगढ़ के किराया के छह गुने से 25 अधिक है। यदि दिल्ली से अलीगढ़ का किराया 57 रुपये है, तो दिल्ली से पटना का किराया कितना रुपये होगा?

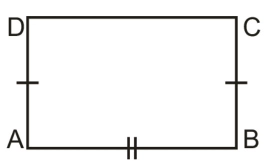
प्र0 3. एक कक्षा में उपस्थित बच्चों की संख्या उस कक्षा के नामांकित बच्चों की संख्या के एक चौथाई से 29 ज़्यादा है। यदि उस कक्षा के नामांकित बच्चों की संख्या 120 है तो बताएँ उस कक्षा में कितने बच्चे उपस्थित हैं?

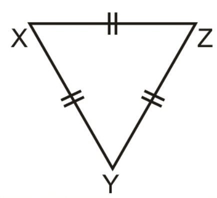
प्र0 4. दिए गए चित्रों को भिन्न के रूप में लिखें और तुलना करें।

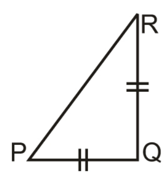
प्र0 5. दिए गए मिश्र भिन्न को अनुचित (विषम) भिन्न में लिखें। (क) $3\frac{1}{2}$ (ख) $3\frac{1}{2}$ (ग) $3\frac{7}{8}$ (घ) $8\frac{7}{9}$

प्र0 6. दिए गए भिन्नों के 4–4 समतुल्य भिन्न लिखें। (क) $\frac{12}{14}$ (ख) $\frac{15}{18}$ (ग) $\frac{20}{42}$ (घ) $\frac{18}{32}$

प्र0 7. दी गई आकृतियों के नाम और उनकी विशेषताएँ लिखें।







आओ सोचें और हल करें

S-3.3

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

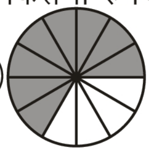
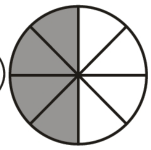
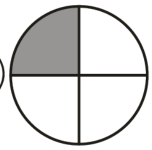
49 + □ = 77   24 − □ = 22   95 X □ = 1800   500 ÷ □ = 50

19 + □ = 89   84 − □ = 48   85 X □ = 850   900 ÷ □ = 90

प्र0 2. अलीगढ़ से दिल्ली की दूरी, अलीगढ़ से गाज़ियाबाद की दूरी के आठ गुने से 88 अधिक है। यदि अलीगढ़ से गाज़ियाबाद की दूरी 55 किलोमीटर है, तो बताएँ अलीगढ़ से दिल्ली की दूरी कितने किलोमीटर होगा?

प्र0 3. एक वस्तु का क्रयमूल्य, उस वस्तु के विक्रयमूल्य के एक तिहाई से 25 रुपये ज़्यादा है। यदि उस वस्तु का विक्रयमूल्य 480 रुपये है, तो बताओ उस वस्तु का क्रयमूल्य कितना रुपये है?

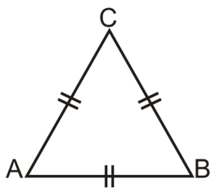
प्र0 4. दिए गए चित्रों को भिन्न के रूप में लिखें और तुलना करें।

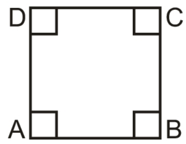
(क)  (ख)  (ग) 

प्र0 5. दिए गए मिश्र भिन्न को अनुचित (विषम) भिन्न में लिखें। (क) $7\frac{1}{2}$ (ख) $3\frac{1}{5}$ (ग) $2\frac{3}{7}$ (घ) $1\frac{1}{2}$

प्र0 6. दिए गए भिन्नों के 3–3 समतुल्य भिन्न लिखें। (क) $\frac{12}{16}$ (ख) $\frac{9}{18}$ (ग) $\frac{22}{44}$ (घ) $\frac{15}{20}$

प्र0 7. दी गई आकृतियों के नाम और उनकी विशेषताएँ लिखें।





S-3.4

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

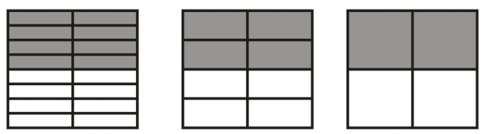
70 + □ = 100   67 − □ = 24   65 X □ = 650   805 ÷ □ = 161

25 + □ = 82   92 − □ = 17   55 X □ = 550   205 ÷ □ = 401

प्र0 2. पांचवीं कक्षा के बच्चों की संख्या, आठवीं कक्षा के बच्चों की संख्या के चार गुने से 24 अधिक है। यदि आठवीं कक्षा के बच्चों की संख्या 48 है तो बताएँ पांचवीं कक्षा के बच्चों की संख्या कितनी होगी?

प्र0 3. मोबाईल की क़ीमत, रेफ्रिजरेटर की क़ीमत के आधे से 490 रुपये ज़्यादा है। यदि रेफ्रिजरेटर की क़ीमत 4800 रुपये है तो मोबाईल की क़ीमत क्या होगी?

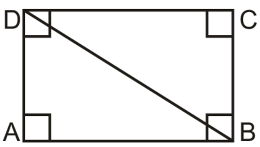
प्र0 4. दिए गए चित्रों को भिन्न के रूप में लिखें और तुलना करें।

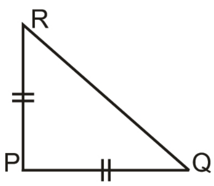


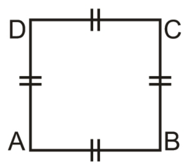
प्र0 5. दिए गए मिश्र भिन्न को अनुचित (विषम) भिन्न में लिखें। (क) $3\frac{1}{2}$ (ख) $7\frac{1}{2}$ (ग) $5\frac{3}{4}$ (घ) $8\frac{2}{5}$

प्र0 6. दिए गए भिन्नों के 5–5 समतुल्य भिन्न लिखें। (क) $\frac{15}{40}$ (ख) $\frac{30}{45}$ (ग) $\frac{9}{36}$ (घ) $\frac{36}{72}$

प्र0 7. दी गई आकृतियों के नाम और उनकी विशेषताएँ लिखें।







आओ सोचें और हल करें

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

4225	=	3220	+	1005
	=		+	
	=		+	
	=		+	

हल:

4225	=	3220	+	
	=	3225	+	1000
	=	3230	+	995
	=	3000	+	1225

प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

5450	=	6550	–	1100
	=		–	
	=		–	
	=		–	

हल:

5450	=	6550	–	1100
	=	6000	–	550
	=	5800	–	350
	=	5700	–	250

प्रश्न 1 और 2 के उत्तर अलग–अलग हो सकते हैं।

प्र0 3. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

हल:

7200	=	120	×	60
	=	1200	×	6
	=	36000	÷	5
	=	21600	÷	3

प्र0 4. राम की उम्र श्याम की उम्र के 5 गुनी से 7 वर्ष कम है। यदि श्याम की उम्र 13 वर्ष हो तो बताएँ राम की उम्र क्या होगी?

हल:

दिया गया है कि श्याम की उम्र 13 वर्ष है तथा राम की उम्र श्याम के उम्र के 5 गुने से 7 वर्ष कम है।

$= 13 \times 5 - 7$

$= 65 - 7$

= 58 वर्ष

∴ राम की उम्र 58 वर्ष है।

प्र0 5. रमा 25 दिनों में 773 रुपये से 148 रुपये कम अपनी गुल्लक में डालती है। तो बताएँ एक दिन में उसने अपनी गुल्लक में कितने रुपये डाले?

हल:

दिया गया है कि रमा 25 दिनों में 773 से 148 रुपये कम गुल्लक में रखती है।

∴ रमा 25 दिनों में रुपये रखती है = 773 – 148

रमा 25 दिनों में रुपये रखती है = 525

$= \frac{525 \div 25}{25 \div 25}$

∴ एक दिन में $= \frac{\cancel{525}\,21}{\cancel{25}\,1}$

= 21 रुपये

रमा एक दिन में 21 रुपये गुल्लक में रखती है।

आओ सोचें और हल करें

प्र0 6. क) नीचे दिए गए भिन्न का सरलतम रूप लिखें।

हल: $\frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2}$ ← अंश और हर को 2 से भाग करने पर

$= \frac{6 \div 3}{9 \div 3}$ ← अंश और हर को 3 से भाग करने पर

$= \frac{2}{3}$

$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

ख) $\frac{24}{64} = \frac{24 \div 2}{64 \div 2}$

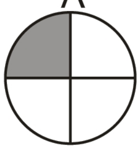
$= \frac{12 \div 2}{32 \div 2}$ ← अंश और हर को 2 से भाग करने पर

$= \frac{6 \div 2}{16 \div 2}$

$\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

प्र0 7. नीचे दी गई आकृतियों के छायांकित भाग को भिन्न रूप में लिखें और तुलना करें।

क) A



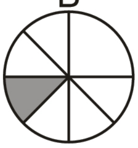
$\frac{1}{4}$

आकृति A का किया गया भाग = 4

आकृति A का छायांकित भाग = 1

∴ इसे भिन्न रूप में $\frac{1}{4}$ लिखेंगे।

B



$\frac{1}{8}$

आकृति B का किया गया भाग = 8

आकृति B का छायांकित भाग = 1

∴ इसे भिन्न रूप में $\frac{1}{8}$ लिखेंगे।

अब आकृति A, B की तुलना करने पर आकृति A का छायांकित भाग > आकृति B के छांयाकित भाग से

अत: $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

इसलिए हम कह सकते हैं कि **किसी भिन्न में अंश समान हो तो भिन्नों की तुलना करने पर जिस भिन्न का हर छोटा हो वह भिन्न बड़ी होती है।**

प्र0 8. नीचे दी गई आकृतियों के छायांकित भाग को भिन्न रूप में लिखें और तुलना करें।

हल:

A

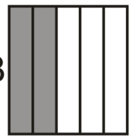
$\frac{1}{5}$

आकृति A का किया गया भाग = 5

आकृति A का छायांकित भाग = 1

∴ इसे भिन्न रूप में $\frac{1}{5}$ लिखेंगे।

B



$\frac{2}{5}$

आकृति B का किया गया भाग = 5

आकृति B का छायांकित भाग = 2

∴ इसे भिन्न रूप में $\frac{2}{5}$ लिखेंगे।

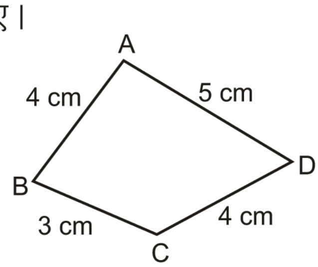
अब आकृति A, B की तुलना करने पर आकृति A का छायांकित भाग < आकृति B के छांयाकित भाग से

अत: $\frac{1}{5} < \frac{2}{5}$

अत: हर समान होने पर भिन्नों की तुलना करते समय जिस भिन्न का अंश बड़ा हो वह भिन्न बड़ी होती है।

प्र0 9. नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात किजिए।

हल:



परिमाप = दी गई आकृति के बाहरी भुजाओं का योगफल

अत: दी गई आकृति में AB = 4 cm

BC = 3 cm

CD = 4 cm

DA = 5 cm

इसलिए

परिमाप = AB + BC + CD + DA

= 4 cm + 3 cm + 4 cm + 5 cm

= 16 cm

परिमाप = 16 cm

आओ सोचें और हल करें

S-4.1

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

1544 = ☐ + ☐ = ☐ + ☐ = ☐ − ☐ = ☐ − ☐

2459 = ☐ + ☐ = ☐ + ☐ = ☐ − ☐ = ☐ − ☐

3240 = ☐ × ☐ = ☐ × ☐ = ☐ ÷ ☐ = ☐ ÷ ☐

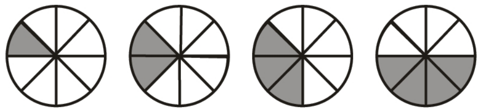
7500 = ☐ × ☐ = ☐ × ☐ = ☐ ÷ ☐ = ☐ ÷ ☐

प्र0 2. प्रियंका के पास निशा के मोती का 5 गुने से 8 कम है। यदि निशा के पास 72 मोती हैं तो बताएँ कि प्रियंका के पास कितने मोती हैं?

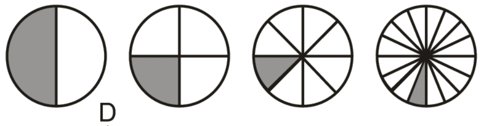
प्र0 3. एक बाल्टी में टंकी का एक–तिहाई से 76 लीटर कम पानी है। यदि टंकी मे 840 लीटर पानी है तो बाल्टी मे कितना लीटर पानी है?

प्र0 4. दिए गए भिन्नों को सरलतम रूप में लिखें। (क) $\frac{18}{24}$ (ख) $\frac{24}{36}$ (ग) $\frac{12}{36}$ (घ) $\frac{9}{81}$

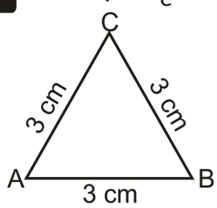
प्र0 5. दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और अवरोही क्रम में रखें।

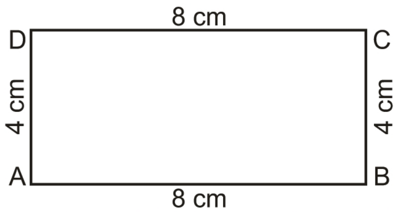


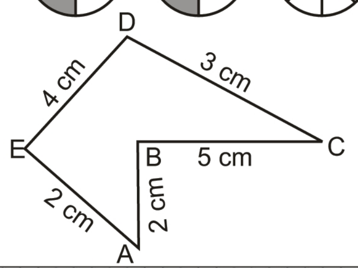
प्र0 6. दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और आरोही क्रम में रखें।



प्र0 7. दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात करें।







S-4.2

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

2560 = ☐ + ☐ = ☐ + ☐ = ☐ − ☐ = ☐ − ☐

1620 = ☐ + ☐ = ☐ + ☐ = ☐ − ☐ = ☐ − ☐

1250 = ☐ × ☐ = ☐ × ☐ = ☐ ÷ ☐ = ☐ ÷ ☐

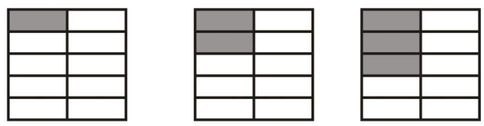
3150 = ☐ × ☐ = ☐ × ☐ = ☐ ÷ ☐ = ☐ ÷ ☐

प्र0 2. एक क़लम की क़ीमत के 4 गुने से 17 रुपये कम एक पुस्तक की क़ीमत है। यदि क़लम की क़ीमत 45 रुपये है तो पुस्तक की क़ीमत कितनी होगी?

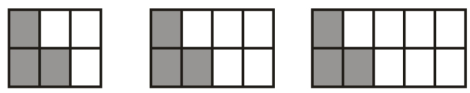
प्र0 3. रीमा का वजन, विवेक के वजन का दो तिहाई से 20 किलोग्राम कम है। यदि विवेक का वजन 75 किलोग्राम है, तो रीमा का वजन कितना होगा?

प्र0 4. दिए गए भिन्नों को सरलतम रूप में लिखें। (क) $\frac{14}{28}$ (ख) $\frac{20}{45}$ (ग) $\frac{60}{80}$ (घ) $\frac{56}{128}$

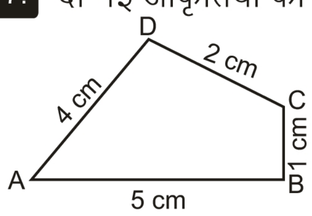
प्र0 5. दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और अवरोही क्रम में रखें।

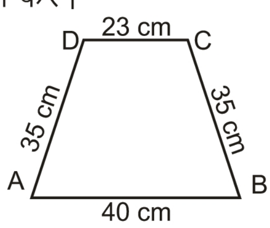


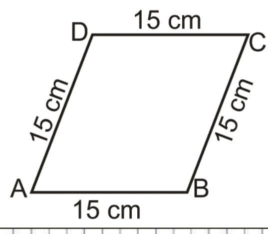
प्र0 6. दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और आरोही क्रम में रखें।



प्र0 7. दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात करें।







आओ सोचें और हल करें

S-4.3

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

5458 = □ + □ = □ + □ = □ − □ = □ − □

4820 = □ + □ = □ + □ = □ − □ = □ − □

3750 = □ × □ = □ × □ = □ ÷ □ = □ ÷ □

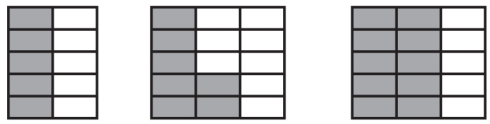
6750 = □ × □ = □ × □ = □ ÷ □ = □ ÷ □

प्र0 2. एक पक्की सड़क की लम्बाई उस सड़क पर बने पुल की लम्बाई के 13 गुना से 38 मीटर अधिक है। यदि पुल की लम्बाई 19 मीटर हो तो पक्की सड़क की लम्बाई कितनी होगी?

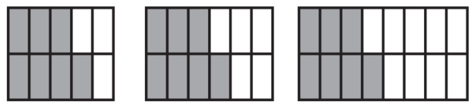
प्र0 3. पंकज की मासिक आय, सुशांत की मासिक आय के आधे से 75 रुपये कम है। यदि सुशांत की मासिक आय 7,500 रुपये है तो पंकज की मासिक आय कितनी होगी?

प्र0 4. दिए गए भिन्नों को सरलतम रूप में लिखें। (क) $\frac{9}{18}$ (ख) $\frac{24}{96}$ (ग) $\frac{74}{28}$ (घ) $\frac{36}{98}$

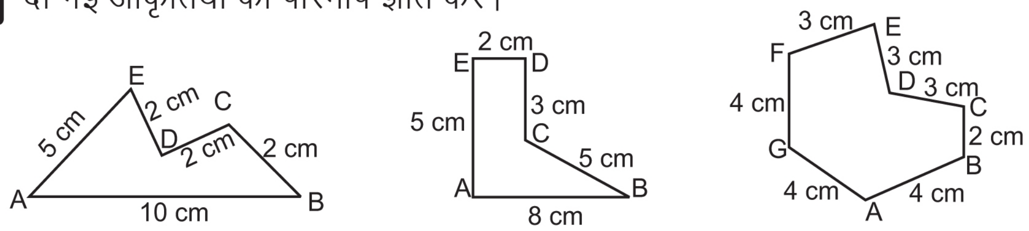
प्र0 5. दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और अवरोही क्रम में रखें।



प्र0 6. दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और आरोही क्रम में रखें।



प्र0 7. दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात करें।



S-4.4

प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

5860 = □ + □ = □ + □ = □ − □ = □ − □

6980 = □ + □ = □ + □ = □ − □ = □ − □

1024 = □ × □ = □ × □ = □ ÷ □ = □ ÷ □

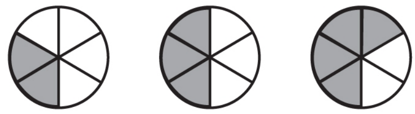
1810 = □ × □ = □ × □ = □ ÷ □ = □ ÷ □

प्र0 2. कुलदीप जितना समय खेलता है, उसके चौगुने समय से 3 घंटा कम पढ़ाई करता है। यदि कुलदीप 3 घंटे खेलता है तो कितने घंटे पढ़ाई करता है?

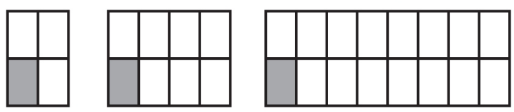
प्र0 3. एक मोटरसाइकिल की क़ीमत, एक फ्रीज की क़ीमत के 5 गुने से 370 रुपये कम है। यदि एक फ्रीज की क़ीमत 8,450 रुपये है, तो मोटरसाइकिल की क़ीमत कितनी होगी?

प्र0 4. दिए गए भिन्नों को सरलतम रूप में लिखें। (क) $\frac{42}{38}$ (ख) $\frac{75}{105}$ (ग) $\frac{102}{306}$ (घ) $\frac{103}{45}$

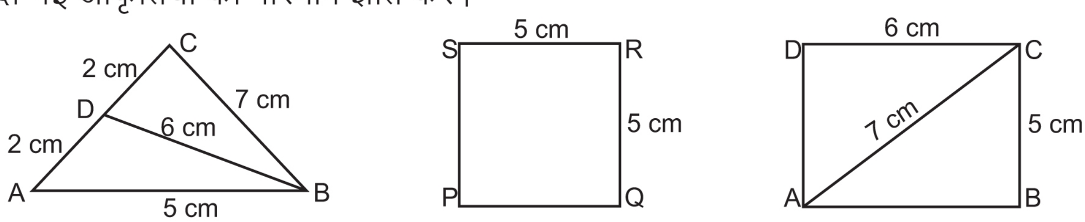
प्र0 5. दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और अवरोही क्रम में रखें।



प्र0 6. दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और आरोही क्रम में रखें।



प्र0 7. दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात करें।



प्र0 1. दिए गए मूल्य चार्ट को देखें और प्रश्नों के उत्तर लिखें।

मूल्य चार्ट

वस्तुएँ	मूल्य
	30 रुपये
	120 रुपये
	25 रुपये
	150 रुपये
	20 रुपये

क) 5 गिलास तथा 2 बाल्टी का कुल मूल्य कितना होगा?
ख) बाल्टी तथा कप के दाम में कितने रुपये का अंतर है?
ग) 5 कप तथा 13 चम्मच का मूल्य बताएँ।
घ) 100 रुपये में हम कितनी चम्मच ख़रीद सकते हैं?
ड़) सबसे कम दाम तथा सबसे अधिक दाम वाली वस्तुओं के दाम में कितने रुपये का अंतर है?
च) रमेश 500 रुपये लेकर बाज़ार गया। वहाँ उसने 6 कप और 12 चम्मच ख़रीदे। बताएँ, रमेश के पास अब कितने रुपये बचे?

हलः

इस चार्ट में वस्तुओं की क़ीमत दी गई है। इसी चार्ट पर आधारित प्रश्न पूछे गए हैं।

क) 5 गिलास तथा 2 बाल्टी की क़ीमत निकालनी है।

1 गिलास की क़ीमत 30 रुपये है। तो 5 गिलास की क़ीमत कितनी होगी?

सै0 द0 इ0
3 0
X 5
0 — 5 X 0 = 0 (0 इकाई को 5 इकाई से गुणा)
+ 1 5 0 ← 30 X 5 = 150 (3 दहाई को 5 इकाई से गुणा)
1 5 0 ← यानि 5 गिलास की क़ीमत होगी = 150 रुपये

इसी प्रकार, 1 बाल्टी की क़ीमत 120 रुपये है तो 2 बाल्टी की क़ीमत हमें पता करना है।

सै0 द0 इ0
1 2 0
X 2
0 — 2 X 0 = 0
+ 4 0 — 20 X 2 = 40
+ 2 0 0 — 100 X 2 = 200
2 4 0 ← यानि 2 बाल्टी की क़ीमत = 240 रुपये

हमने 5 गिलास और 2 बाल्टी की क़ीमत ज्ञात करली। अब हमें यह भी ज्ञात करना है कि दोनों की क़ीमत क्या होगी?

अर्थात् 5 गिलास और 2 बाल्टी की क़ीमत = 150 + 240
= 390 रुपये

ख) बाल्टी तथा कप के दाम में अन्तर।

सै0 द0 इ0
0 1 10
1 2 0
− 2 5
0 9 5

बाल्टी की क़ीमत = 120 रुपये
कप की क़ीमत = 25 रुपये

अन्तर जानने के लिए हमे एक संख्या से दूसरी संख्या को घटाना होगा।

अन्तर = 120 − 25 = 95 रुपये

घ) कुल रुपये 100 है और 1 चम्मच की क़ीमत 20 रुपये है तो 100 रुपये में कितने चम्मच ख़रीदे जा सकते हैं?

यानि 100 को 20 से भाग करना होगा।

सै0 द0 इ0
0 0 5
20) 1 0 0 (
−0 ← पहला 20 X 0 = 0
1 0
− 0 ← दूसरा 20 X 0 = 0
1 0 0
− 1 0 0 ← तीसरा 20 X 5 = 100
0 0 0

(पहला, दूसरा, तीसरा) चरण

अर्थात् 100 रुपये में 5 चम्मच खरीद सकते हैं।

ड़) मूल्य चार्ट में

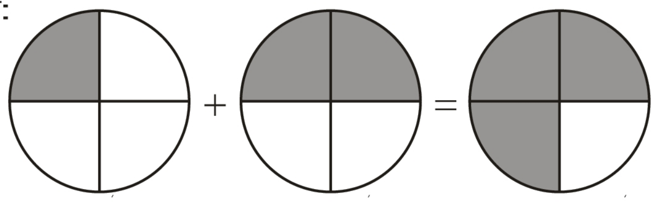
सबसे कम क़ीमत वाली वस्तु है = चम्मच
1 चम्मच की क़ीमत = 20 रुपये
सबसे अधिक क़ीमत वाली वस्तु है = जग
1 जग की क़ीमत = 150 रुपये

यानि जग और चम्मच की क़ीमत का अन्तर है।
= 150 − 20
= 130 रुपये

प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और हल करें।

हल:

(क)



$\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{2}{4}$ $\quad$ $\frac{3}{4}$

यहाँ पहले चित्र में भिन्न $= \frac{\text{लिया गया भाग}}{\text{किया गया भाग}} = \frac{1}{4}$

इसी प्रकार, दूसरे चित्र में भिन्न $= \frac{2}{4}$

अब $\frac{1}{4}$ और $\frac{2}{4}$ को जोड़ने पर $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$

$= \frac{1+2}{4}$

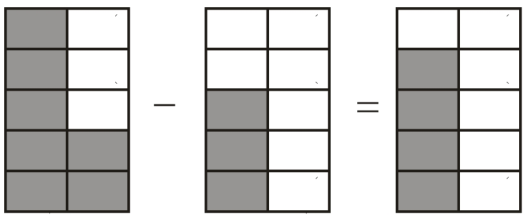
$= \frac{3}{4}$

अतः $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

प्र0 3. दिए गए चिन्हों को समझते हुए भिन्नों को सरल करें।

हल:

(क)



पहली आकृति में कुल 10 ख़ाने हैं जिनमें से 7 ख़ाने छायांकित हैं तो इसे हम इस तरह लिख सकते हैं $\frac{7}{10}$

आकृति से $\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$

पहली आकृति में एक वस्तु के किये गये भाग = 10

और एक वस्तु के लिये गये भाग = 7

$\therefore$ भिन्न $= \frac{\text{लिया गया भाग}}{\text{किये गये भाग}} = \frac{7}{10}$

इसी प्रकार, दूसरी आकृति में कुल 10 ख़ाने हैं जिनमें 3 ख़ाने छायांकित हैं यानि

भिन्न $= \frac{\text{लिया गया भाग}}{\text{किये गये भाग}} = \frac{3}{10}$

अब $\frac{7}{10} - \frac{3}{10}$ से, किये गये भाग = 10

और लिये गये भाग = 7 और 3

$\therefore$ भिन्नों का घटाव $= \frac{\text{लिये गये भाग का घटाव}}{\text{किये गये भाग}}$

$= \frac{7-3}{10}$

$= \frac{4}{10}$ उत्तर

यानि $\frac{4 \div 2}{10 \div 2} = \frac{2}{5}$

अतः $\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$

प्र0 4. दिए गए चिन्हों को समझते हुए भिन्नों को सरल करें।

हल: क) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ में छायांकित किये गये भाग = 5

और लिये गये भाग = 1 और 3

$\therefore$ भिन्नों का जोड़ $= \frac{\text{लिये गये भाग का जोड़}}{\text{किये गये भाग}}$

$= \frac{1+3}{5}$

$= \frac{4}{5}$ उत्तर

ग) $\frac{5}{9} - \frac{2}{9}$ में किये गये भाग = 9

और लिये गये भाग = 5 और 2

$\therefore$ भिन्नों का घटाव $= \frac{\text{लिये गये भाग का घटाव}}{\text{समान किये गये भाग}}$

$= \frac{5-2}{9}$

$= \frac{3}{9}$

$\frac{3}{9}$ को संक्षिप्त रूप में $\frac{1}{3}$ भी लिखा जा सकता है।

इसके लिए $\frac{3}{9}$ के अंश और हर में 3 से भाग करना होगा।

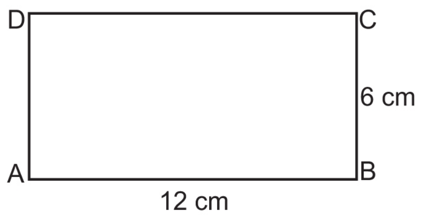
यानि $\frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$ (चूँकि अंश और हर का महत्तम समापवर्त्तक 3 है।)

अर्थात् $\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$

प्र0 5. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल:

(क)

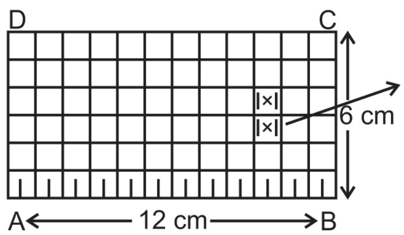


भुजा AB = भुजा CD = 12 cm

और भुजा BC = भुजा AB = 6 cm दिया हुआ है।

इस आकृति का क्षेत्रफल निकालने के लिए हमें आकृति के घिरे क्षेत्र का कुल मान निकालना है। इसके लिए, इस आकृति के भुजा AB को 12 समान भागों और भुजा BC को 6 समान भागों में इस प्रकार बाँटते हैं कि आकृति के प्रत्येक छोटे भाग की लम्बाई और चौड़ाई 1 cm हो जाए तथा आकृति 12 × 6 = 72 समान भागों में बँटी दिखाई पड़े।

जैसे –



इस आकृति को 12 × 6 = 72 समान भागों में बाँटा गया है।

इसमें से एक छोटे भाग की लम्बाई = 1 cm
और चौड़ाई = 1 cm

∴ एक छोटे भाग का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई
= 1 × 1
= $1\ cm^2$

अब, ऐसे ही 72 छोटे भाग का क्षेत्रफल = $72 \times 1\ cm^2$

अर्थात् आकृति ABCD का क्षेत्रफल = $72 cm^2$

आओ सोचें और हल करें

प्र0 1.

संजीव किराना स्टोर	
वस्तुएं	क़ीमत(प्रति किलो)
चावल	35 रुपए
दाल	180 रुपए
चीनी	40 रुपए
नमक	15 रुपए
सरसों का तेल	100 रुपए
आटा	18 रुपए
गेहूँ	14 रुपए

क) मुल्य चार्ट तालिका में किस वस्तु की क़ीमत सबसे अधिक है?

ख) चावल की क़ीमत से सरसों के तेल की क़ीमत कितनी ज़्यादा है?

ग) 3 किलो चीनी और 5 किलो आटे की क़ीमत कितनी होगी?

घ) दाल की क़ीमत आटे की क़ीमत से कितनी ज़्यादा है?

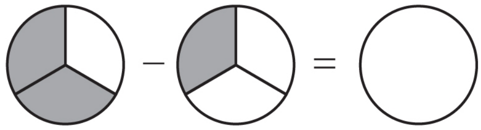
ड़) सभी सामान दो–दो किलो ख़रीदने पर कुल कितने रुपये ख़र्च होंगे?

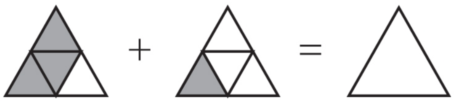
च) 8 किलो गेहूँ ख़रीदने पर दुकानदार 500 रुपये में से नंदन को कितने रुपये वापस देगा?

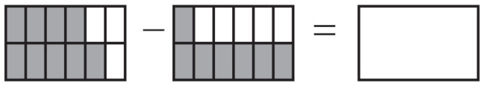
आओ सोचें और हल करें

प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए दी गई आकृतियों को भिन्न के रूप में लिखें और हल करें।

क)

ग) 

ख) 

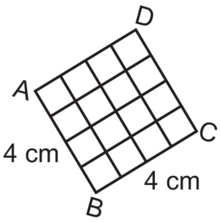
घ) 

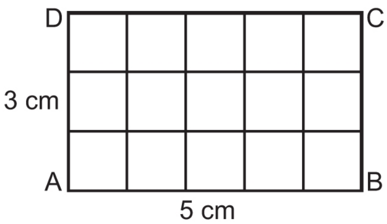
प्र0 3. चिन्हों को समझते हुए भिन्नों को सरल करें।

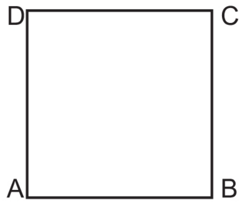
(क) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=?$ (ख) $\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=?$ (ग) $\frac{5}{11}+\frac{8}{11}=?$ (घ) $\frac{9}{15}+\frac{7}{15}=?$

(ग) $\frac{9}{10}-\frac{5}{10}=?$ (ग) $\frac{7}{9}-\frac{3}{9}=?$ (ग) $\frac{12}{17}-\frac{9}{17}=?$ (ग) $\frac{22}{35}-\frac{12}{35}=?$

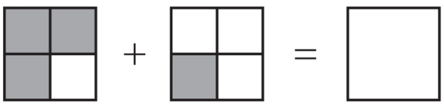
प्र0 4. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

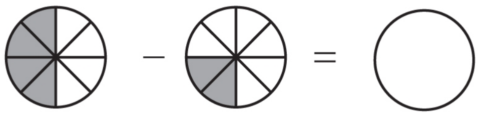


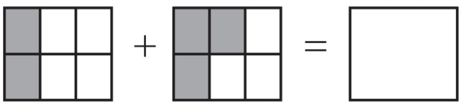


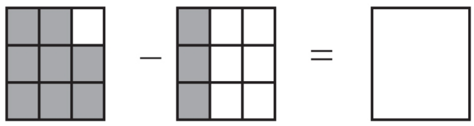


प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए दी गई आकृतियों को भिन्न के रूप में लिखें और हल करें।

क) 

ग) 

ख) 

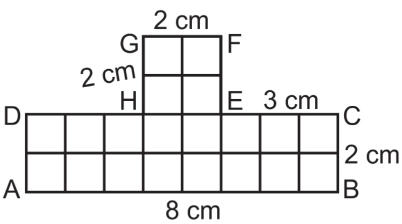
घ) 

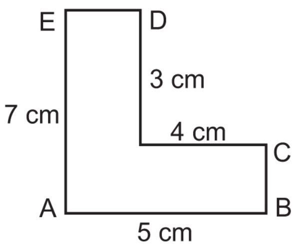
प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए भिन्नों को सरल करें।

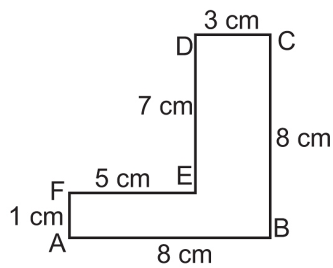
(क) $\frac{11}{7}+\frac{13}{7}=?$ (ख) $\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=?$ (ग) $\frac{22}{13}+\frac{14}{13}=?$ (घ) $\frac{16}{23}+\frac{15}{23}=?$

(ग) $\frac{14}{9}-\frac{7}{9}=?$ (ग) $\frac{17}{11}-\frac{13}{11}=?$ (ग) $\frac{22}{27}-\frac{11}{27}=?$ (ग) $\frac{19}{17}-\frac{9}{17}=?$

प्र0 3. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।







प्र0 1.

भोजन सूची	
वस्तुएं	क़ीमत
सादा खाना	45 रुपये
स्पेशल खाना	85 रुपये
पानी बोतल	15 रुपये
लस्सी	25 रुपये
चाय	7 रुपये

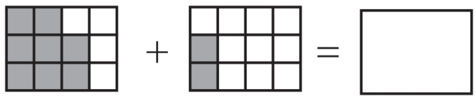
क) 35 यात्रियों की एक बस होटल पर आई। 11 यात्रियों ने सादा खाना खाया और एक–एक गिलास लस्सी पी तथा 7 यात्रियों ने 2–2 कप चाय पी। बताएँ, उन यात्रियों ने कुल कितने रुपये ख़र्च किए?

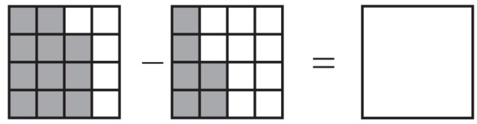
ख) 15 यात्रियों ने स्पेशल खाना खाया और 14 बोतल पानी, 17 गिलास लस्सी पी 9 कप चाय पी। बताएँ उन 13 यात्रियों ने कुल कितने रुपये ख़र्च किए?

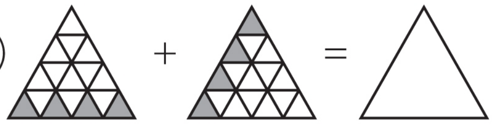
ग) 9 यात्रियों ने 3–3 गिलास लस्सी पी तथा 1–1 बोतल पानी पिया। बताएँ दुकानदार ने उनसे कुल कितने रुपये लिए?

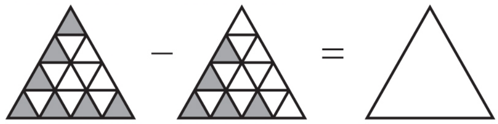
आओ सोचें और हल करें

प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और हल करें।

क) 

ग) 

ख) 

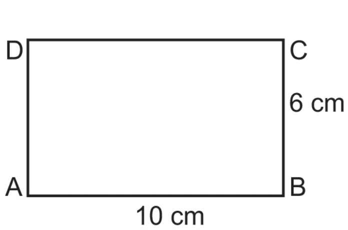
घ) 

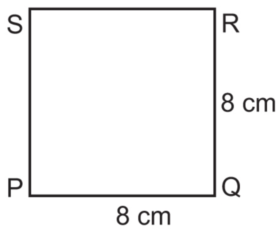
प्र0 3. चिन्हों को समझते हुए भिन्नों को सरल करें।

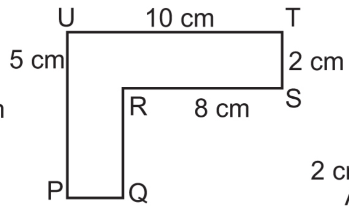
(क) $\frac{12}{5}+\frac{9}{5}=?$ (ख) $\frac{19}{13}+\frac{20}{13}=?$ (ग) $\frac{18}{23}+\frac{31}{23}=?$ (घ) $\frac{29}{5}+\frac{27}{5}=?$

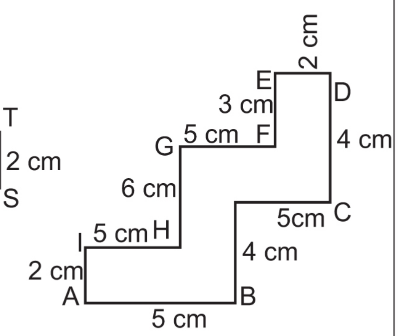
(ग) $\frac{17}{12}-\frac{15}{12}=?$ (ग) $\frac{20}{9}-\frac{5}{9}=?$ (ग) $\frac{25}{14}-\frac{12}{14}=?$ (ग) $\frac{24}{18}-\frac{34}{18}=?$

प्र0 4. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

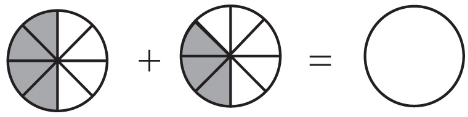


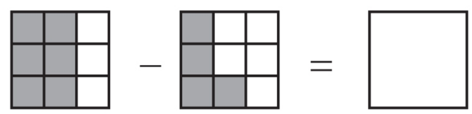


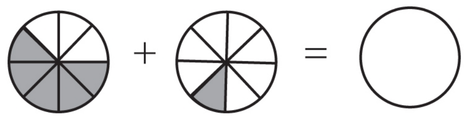


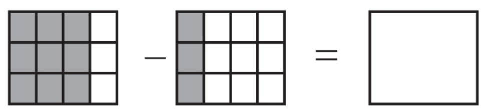


प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न के रूप में लिखें और हल करें।

क) 

ग) 

ख) 

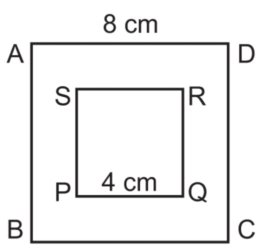
घ) 

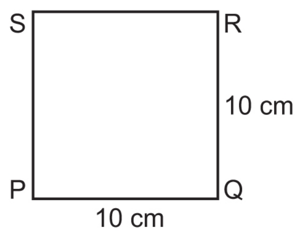
प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए भिन्नों को सरल करें।

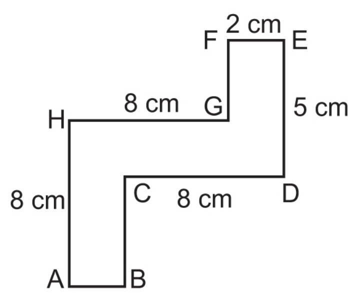
(क) $\frac{9}{13}+\frac{7}{13}=?$ (ख) $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}=?$ (ग) $\frac{14}{27}+\frac{15}{27}=?$ (घ) $\frac{13}{17}+\frac{18}{17}=?$

(ग) $\frac{39}{30}-\frac{15}{30}=?$ (ग) $\frac{17}{29}-\frac{11}{29}=?$ (ग) $\frac{27}{18}-\frac{19}{18}=?$ (ग) $\frac{32}{13}-\frac{14}{13}=?$

प्र0 3. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

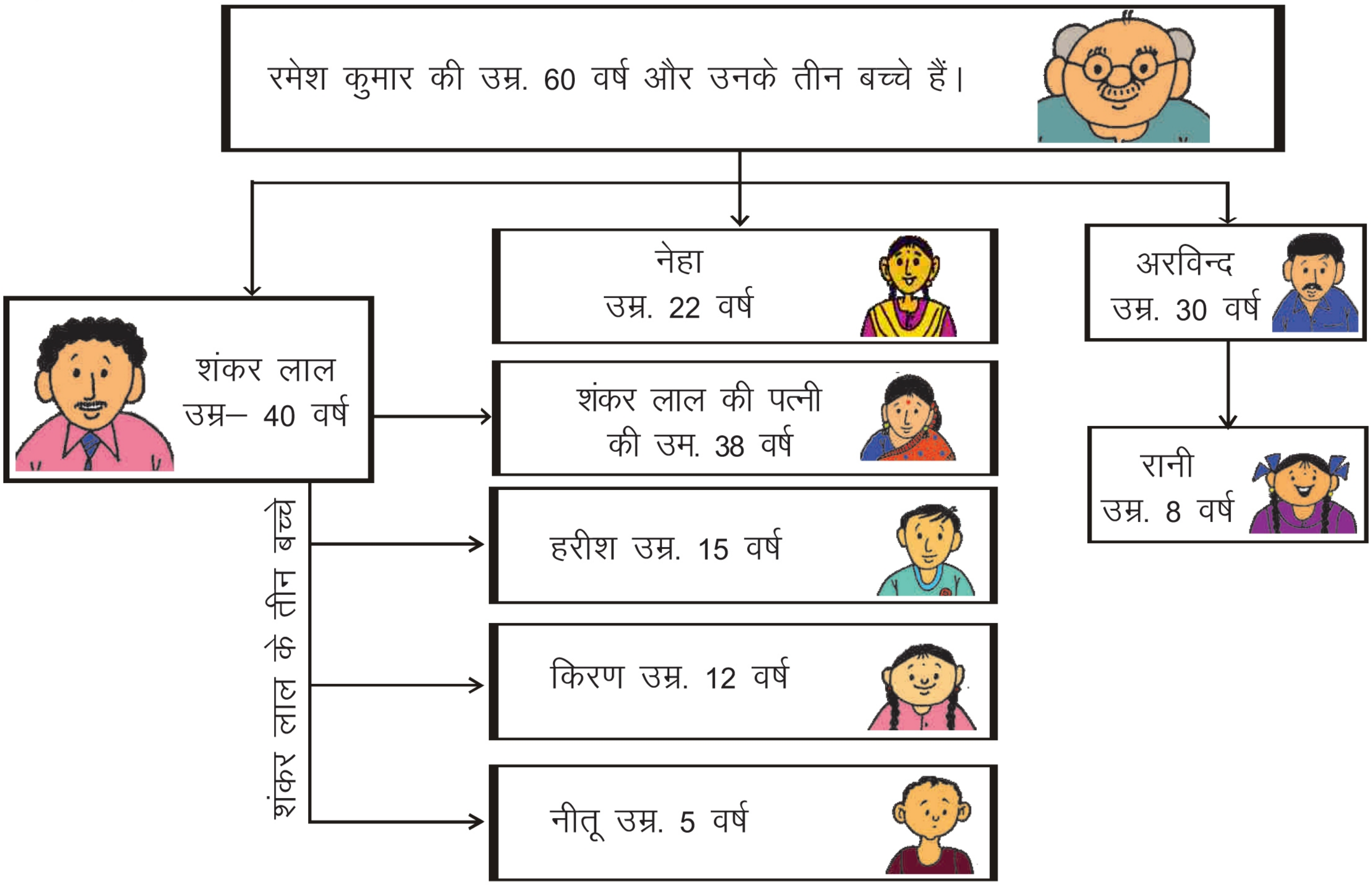






आओ सोचें और हल करें

प्र0 1. आइए इस परिवार के सदस्यों की उम्र का पता लगाएँ।



क) रमेश कुमार की सबसे छोटी पोती कितने वर्ष की है?

ख) शंकर लाल की सबसे छोटी बेटी अरविन्द की बेटी से कितनी बड़ी है?

ग) हरीश अपने पापा से कितने वर्ष छोटा है?

घ) नीतू के चाचा नीतू से कितने वर्ष बड़े हैं?

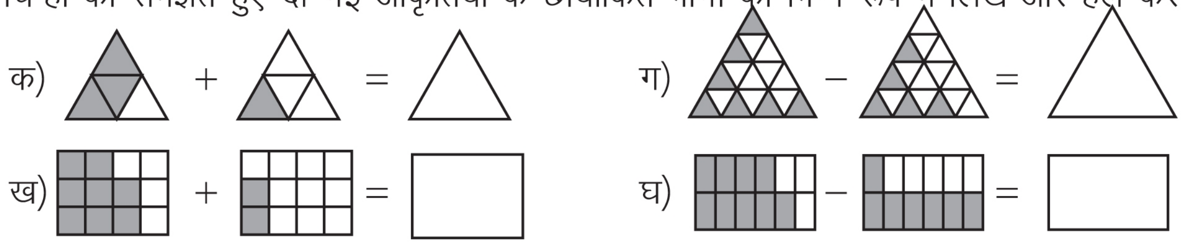
ड़) इस परिवार में कितने लोगों की उम्र 13 वर्ष से अधिक है?

च) कितने साल बाद रानी अपनी आज की उम्र से चौगुनी उम्र की हो जाएगी?

छ) 5 साल पहले नेहा, रमेश कुमार तथा अरविन्द के उम्र का योग कितना था?

आओ सोचें और हल करें

प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न रूप में लिखें और हल करें।

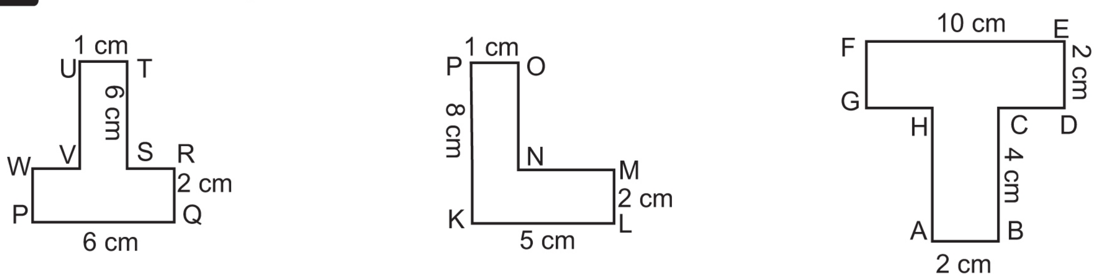


प्र0 3. चिन्हों को समझते हुए भिन्नों को सरल करें।

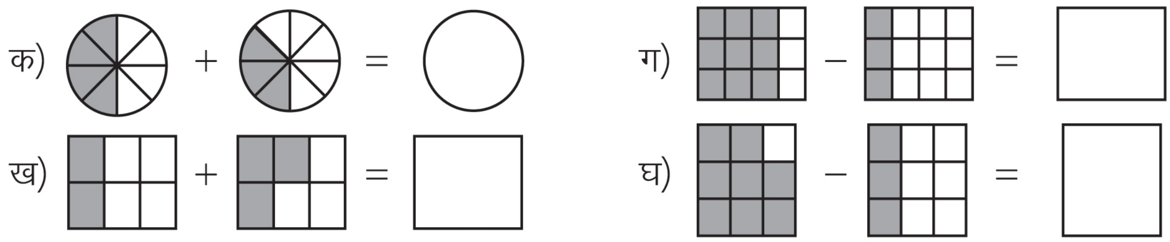
(क) $\frac{3}{12} + \frac{5}{12} = ?$ (ख) $\frac{7}{15} + \frac{3}{15} = ?$ (ग) $\frac{9}{16} + \frac{6}{16} = ?$ (घ) $\frac{9}{17} + \frac{3}{17} = ?$

(ग) $\frac{4}{13} - \frac{3}{13} = ?$ (ग) $\frac{15}{23} - \frac{12}{23} = ?$ (ग) $\frac{19}{28} - \frac{11}{28} = ?$ (ग) $\frac{29}{47} - \frac{12}{47} = ?$

प्र0 4. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



प्र0 1. चिन्हों को समझते हुए दी गई आकृतियों के छायांकित भागों को भिन्न रूप में लिखें और हल करें।

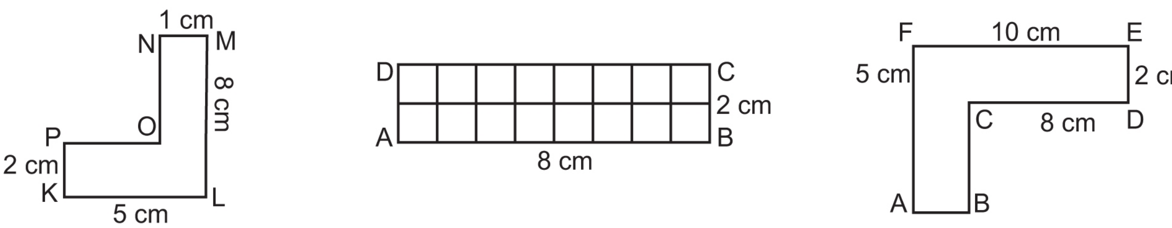


प्र0 2. चिन्हों को समझते हुए भिन्नों को सरल करें।

(क) $\frac{19}{41} + \frac{14}{41} = ?$ (ख) $\frac{15}{27} + \frac{11}{27} = ?$ (ग) $\frac{17}{29} + \frac{14}{29} = ?$ (घ) $\frac{27}{42} + \frac{35}{42} = ?$

(ग) $\frac{11}{48} - \frac{3}{48} = ?$ (ग) $\frac{34}{56} - \frac{13}{56} = ?$ (ग) $\frac{48}{55} - \frac{42}{55} = ?$ (ग) $\frac{15}{77} - \frac{12}{77} = ?$

प्र0 3. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



आओ सोचें और हल करें

प्र0 1. गोलू और भोलू गोटी खेल रहे थे। गोलू के पास ...... गोटियाँ थीं और भोलू के पास गोलू से ...... गोटियाँ अधिक थीं। यानि भोलू के पास कुल ...... गोटियाँ थीं। तभी वहाँ पर सोनू आता है जिसके पास भोलू और गोलू से दोगुनी गोटियाँ हैं। यानि सोनू के पास कुल ...... गोटियाँ हैं। गोटी के खेल में गोलू और भोलू सोनू से ...... गोटियाँ हार जाते हैं तो अब गोलू के पास ...... भोलू के पास ...... और सोनू के पास ...... गोटियाँ हो जाती हैं।

हल: गोलू और भोलू गोटी खेल रहे थे। मैंने मान लिया कि गोलू के पास 80 गोटियाँ हैं, तो भोलू के पास गोलू से 30 गोटियाँ अधिक होंगी यानि भोलू के पास 80 + 30 = 110 गोटियाँ हैं। तभी वहाँ सोनू आता है। सोनू के पास भोलू और गोलू की गोटियों की संख्या की दोगुनी गोटियाँ हैं। यानि सोनू के पास (80 + 110) x 2 = 190 x 2 = 380 गोटियाँ हैं।
गोटी के खेल में गोलू और भोलू सोनू से क्रमशः 15 व 10 गोटियाँ हार जाते हैं। इसका मतलब हुआ कि अब गोलू के पास 80 – 15 = 75 तथा भोलू के पास 110 – 10 = 100 गोटियाँ ही बचीं। सोनू के पास पहले से 380 गोटियाँ थीं और उसने 25 गोटियाँ जीती यानि कुल 380 + 25 = 405 गोटियाँ हो गयीं।

(दिए गए प्रश्नों में आप स्वयं से कोई संख्या चुनकर हल कर सकते हैं इसलिए दिए गए प्रश्न के उत्तर अलग–अलग भी आ सकते हैं।)

प्र0 2. रेहाना ने अपनी माँ को 24 फूलों का एक गुलदस्ता दिया। इस गुलदस्ते में गुलाब, गुलबहार तथा चमेली के फूल हैं। गुलबहार के फूल गुलाब के फुलों से दोगुने हैं तथा चमेली के फूल गुलाब के फूलों से तीन गुने हैं। तीनों फूलों की संख्या बताएँ?

हल: मान लिजिए कि गुलदस्ते में गुलाब के फूलों की संख्या = ☐

गुलाब की संख्या = ☐

तो गुलबहार के फूल = 2 x गुलाब के फूल
= 2 x ☐

चमेली के फूल = 3 x गुलाब के फूल
= 3 x ☐

तीनों फूलों की संख्या = 24

अतः गुलाब के फूल + गुलबहार के फूल + चमेली के फूल = 24

☐ + 2 ☐ + 3 ☐ = 24

6 ☐ = 24

दोनों पक्षों में 6 से भाग करने पर

6 ☐ ÷ 6 = 24 ÷ 6

☐ = 24 ÷ 6

☐ = 4

अतः गुलाब के फूल की संख्या = 4

गुलबहार के फूल की संख्या = 2 x ☐
= 2 X 4
= 8

चमेली के फूल की संख्या = 3 x ☐
= 3 X 4
= 12

प्र0 3. क) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = ?$

हल:

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

2	2, 3
3	1, 3
	1 1

2 और 3 का ल0स0

ल0स0 = 2 X 3

= 6

$= \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$

2 और 3 के ल0स0 6 को हर 2 से भाग करने के बाद 3 प्राप्त हुआ अब अंश और हर को 3 से गुणा करने पर।

2 और 3 के ल0स0 6 को हर 3 से भाग करने के बाद 2 प्राप्त हुआ अब अंश और हर को 2 से गुणा करने पर।

$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6}$

$= \frac{3 + 4}{6}$

$= \frac{7}{6}$

अतः $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

प्र0 4. क) $\frac{11}{4} - \frac{7}{22}$

हल:

$= \frac{11}{4} - \frac{7}{22}$

2	4, 22
2	4, 22
11	1, 11
	1, 11

4 और 22 का ल0स0

ल0स0 = 2 X 2 X 11

= 44

$= \frac{11 \times 11}{3 \times 11} + \frac{7 \times 2}{22 \times 2}$

4 और 22 के ल0स0 44 को हर 4 से भाग करने के बाद 11 प्राप्त हुआ अब अंश और हर को 11 से गुणा करने पर।

4 और 22 के ल0स0 44 को हर 22 से भाग करने के बाद 2 प्राप्त हुआ अब अंश और हर को 2 से गुणा करने पर।

$= \frac{121}{44} + \frac{14}{44}$

$= \frac{121 - 14}{44}$

$= \frac{107}{44}$

अतः $\frac{11}{4} - \frac{7}{22} = \frac{107}{44}$

प्र0 5. क) $1\frac{1}{5} + 1\frac{1}{6} = ?$

हल:

$= \frac{5 \times 1 + 1}{5} + \frac{6 \times 1 + 1}{6}$

$= \frac{5 + 1}{5} + \frac{6 + 1}{6}$

दिए गए भिन्न को अनुचित भिन्न में बदलकर हम इस रूप में भी लिख सकते हैं।

$= \frac{6}{5} + \frac{7}{6}$

$= \frac{6 \times 6}{5 \times 6} + \frac{7 \times 5}{6 \times 5}$

5	5, 6
6	1, 6
	1, 1

$= \frac{36}{30} + \frac{35}{30}$

5 और 6 का ल0स0

ल0स0 = 5 X 6

= 30

$= \frac{36 + 35}{30}$

$= \frac{71}{30}$ या $2\frac{11}{30}$

अतः $1\frac{1}{5} + 1\frac{1}{6} = 2\frac{11}{30}$

ख) $4\frac{1}{3} - \frac{5}{6} = ?$

हल:

$= \frac{4 \times 3 + 1}{3} - \frac{5}{6}$

$= \frac{13}{3} - \frac{5}{6}$

दिए गए भिन्न को अनुचित भिन्न में बदलकर हम इस रूप में भी लिख सकते हैं।

$= \frac{13 \times 2}{3 \times 2} - \frac{5 \times 1}{6 \times 1}$

$= \frac{26}{6} - \frac{5}{6}$

3	6, 3
2	2, 1
	1, 1

$= \frac{26 - 5}{6}$

$= \frac{\cancel{21}^{\,7}}{\cancel{6}_{\,2}}$

6 और 3 का ल0स0

ल0स0 = 2 X 3

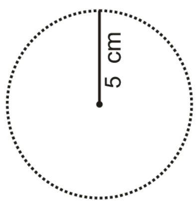
= 6

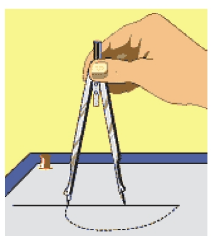
$= \frac{7}{2}$ या $3\frac{1}{2}$

अतः $4\frac{1}{3} - \frac{5}{6} = 3\frac{1}{2}$

प्र0 6. प्रकार की सहायता से एक वृत्त बनाएँ जिसकी त्रिज्या 5 सें0मी0 है।

हल:





प्रकार की सहायता से एक वृत्त बनाया जिसकी त्रिज्या 5 सें0मी0 है।

आओ सोचें और हल करें

S-6.1

प्र0 1. राधिका ने सब्ज़ी की दुकान से .... किलो आलू और........................किलो टमाटर लिए। राधिका ने दुकानदार को कुल.................................रुपये दिए। एक किलो आलू की क़ीमत................ .... रुपये है और एक किलो टमाटर की क़ीमत...................... रुपये है। राधिका ने दुकानदार को आलू के लिए......................................रुपये और टमाटर के लिए....................... रुपये दिए।

प्र0 2. मेले के लिए अमित पहले से ही रुपये बचा रहा है। प्रत्येक दिन वह पिछले दिन से 150 रुपये ज़्यादा बचाता है। यदि वह पहले दिन 350 रुपये बचाता है तो बताएँ 10 दिन में उसके पास कितने रुपये हो जाएँगे?

प्र0 3. रमेश एक टी.वी. ख़रीदना चाहता है। इसके लिए उसने रुपये जमा करना प्रारम्भ किया है। उसने पहले दिन 100 रुपये, दूसरे दिन 200 रुपये, तीसरे दिन 300 रुपये जमा किए। यदि रमेश 10 दिन तक इसी क्रम से रुपये जमा करे तो उसके पास कितने रुपये हो जाएँगे?

प्र0 4. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $\frac{4}{5}+\frac{5}{10}$ (ख) $\frac{4}{5}+\frac{1}{3}$ (ग) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ (घ) $\frac{9}{10}+\frac{2}{3}$

प्र0 5. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $\frac{9}{4}-\frac{9}{14}$ (ख) $\frac{18}{16}-\frac{5}{9}$ (ग) $\frac{7}{9}-\frac{4}{19}$ (घ) $\frac{15}{22}-\frac{1}{20}$

प्र0 6. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $2+3\frac{1}{2}$ (ख) $1\frac{3}{5}+2\frac{2}{7}$ (ग) $4\frac{2}{3}-2\frac{2}{3}$ (घ) $1\frac{1}{3}-\frac{2}{7}$

प्र0 7. दी गई त्रिज्या के आधार पर वृत्त बनाएँ जिसकी लम्बाई, 9 सें.मी., 7.5 सें.मी., 8 सें.मी., 10 सें.मी. आदि हो।

S-6.2

प्र0 1. दीपक ने सुबह.........................बजे से.........................बजे तक ऑटो रिक्शा चलाकर 458 रुपये कमाए। इसके बाद दीपक.......................बजे पेट्रोल पंप पर पहुंचा और दीपक ने ऑटो रिक्शा में.......................लीटर पेट्रोल भराया और उसके लिए.......................रुपये दिए। पेट्रोल भरने में उसे........................मिनट लग गए। वहाँ से उसने एक सवारी ली। उसमें उसे .... रुपये मिले। सवारी को छोड़ कर वह .... मिनट में घर पहुँच गया। दीपक ने आज दिन भर में ....घंटे ऑटो रिक्शा चलाकर.... ....रुपये कमाए।

प्र0 2. एक कार निर्माता कम्पनी ने कुछ नई गाड़ियों का निर्माण किया। वह प्रत्येक गाड़ी के मॉडल पर चार अंकों की संख्या लिखना चाहते हैं। वे केवल 2, 5, 7 और 8 अंक का इस्तेमाल करेंगे। एक संख्या में कोई अंक केवल एक बार ही लिखा जाएगा। बताएँ इस प्रकार दिए गए अंकों की मदद से वह अलग–अलग प्रकार की कितनी संख्या बना सकते हैं जिसे वह गाड़ियों के मॉडल पर लिखने में प्रयोग कर सकें ?

प्र0 3. रमेश के पास पानी की दो टंकियाँ हैं। पहली टंकी को एक नल 1 मिनट में 10 लीटर पानी भरता है तथा दूसरी टंकी को दूसरा नल 1 मिनट में 20 लीटर पानी भरता है। यदि पहले से ही पहली टंकी में 10 लीटर तथा दूसरी टंकी में 70 लीटर पानी है तो बताएँ कि एक साथ दोनों नल को खोला जाए तो कितने मिनट में दूसरी टंकी में पहली टंकी से 3 गुना पानी हो जाएगा?

प्र0 4. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $\frac{6}{5}+\frac{5}{11}$ (ख) $\frac{6}{11}+\frac{9}{2}$ (ग) $\frac{9}{6}+\frac{1}{12}$ (घ) $\frac{10}{3}+\frac{4}{6}$

प्र0 5. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $\frac{11}{21}-\frac{3}{15}$ (ख) $\frac{11}{8}-\frac{15}{13}$ (ग) $\frac{15}{2}-\frac{1}{4}$ (घ) $\frac{25}{20}-\frac{13}{19}$

प्र0 6. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $3\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$ (ख) $2\frac{3}{5}+3$ (ग) $3\frac{1}{5}-2$ (घ) $4-3\frac{1}{4}$

प्र0 7. दी गई त्रिज्या के आधार पर वृत्त बनाएँ जिसकी लम्बाई, 8 सेंमी., 7.5 सेंमी., 12 सेंमी., 3.5 सेंमी. आदि हो।

आओ सोचें और हल करें

S-6.3

प्र0 1. विकास को.................................विषयों की अर्धवार्षिक परीक्षा में कुल......................................में से......... ....अंक मिले। हिंदी में उसे......................................, इतिहास–भूगोल में.................................... विज्ञान में........................., अंग्रेज़ी में...और गणित में.. .... अंक प्राप्त हुए। विकास को प्रत्येक विषयों के मौखिक परीक्षा के कुल........................ अंक भी मिले।

प्र0 2. जयचन्द्र अपने बग़ीचे में फूल लगाने की योजना बना रहा है। उसे प्रत्येक पौधे के लिए 1 वर्ग मीटर की जगह चाहिए। उस बग़ीचे की लम्बाई 5 मीटर तथा चौड़ाई 3 मीटर है। बताएँ उस बग़ीचे में फूल लगाने के लिए कितने पौधों की आवश्यकता होगी?

प्र0 3. एक टोकरी में 42 गाजर रखे गए हैं। अंकित रोज़ कुछ गाजर खा जाता है। इसलिए पहले दिन 34 गाजर बचे। दूसरे दिन 32 गाजर बचे। तीसरे दिन 27 गाजर बचे। यदि इसी तरह से गाजर समाप्त होती रहीं तो 7 वें दिन कितनी गाजरें बचेंगी?

प्र0 4. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ (ख) $\frac{3}{6}+\frac{1}{5}$ (ग) $\frac{5}{7}+\frac{1}{3}$ (घ) $\frac{9}{11}+\frac{5}{3}$

प्र0 5. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $\frac{49}{4}-\frac{21}{3}$ (ख) $\frac{8}{6}-\frac{1}{3}$ (ग) $\frac{17}{9}-\frac{4}{18}$ (घ) $\frac{5}{2}-\frac{1}{20}$

प्र0 6. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $5+4\frac{1}{2}$ (ख) $1\frac{2}{3}+3\frac{5}{7}$ (ग) $7\frac{3}{5}-3\frac{2}{7}$ (घ)$4\frac{2}{3}-\frac{2}{7}$

प्र0 7. दी गई त्रिज्या के आधार पर वृत्त बनाएँ जिसकी लम्बाई, 5 सें.मी., 6 सें.मी., 6.5 सें.मी., 2 सें.मी. आदि हो।

S-6.4

प्र0 1. रामलाल ने...एकड़ खेत की फसल कटाई के लिए.......................................मज़दूर रखे। यदि .... मज़दूरों की पगार..................................... रुपये है तो...................................... मज़दूर का पगार.......................रुपये होगा। ....एकड़ खेत के फसल कटाई में............ ....दिन लग जाते हैं तो.........................दिन में..एकड़ खेत की कटाई के लिए लगभग..................................... मज़दूर चाहिए।

प्र0 2. अनु की उम्र 20 वर्ष है। अनु के पिताजी की उम्र उसकी उम्र से चार गुना अधिक है। अनु की माता की उम्र उसकी उम्र से तीन गुना अधिक है और अनु की दीदी की उम्र उसके पिता की उम्र से आधी है। बताएँ अनु की दीदी की उम्र कितनी है? और अनु की दीदी से उसकी माँ की उम्र कितनी ज़्यादा है?

प्र0 3. हरीश की भैंस सुबह 5 लीटर तथा शाम को 4 लीटर दूध देती है। प्रतिदिन 6 लीटर के हिसाब से वह सप्ताह में 5 दिन दूध बेचता है। सप्ताह के बाकी दिनों का पूरा दूध वह दही जमाने के लिए रख लेता है। बताएँ हरीश प्रतिदिन कितना लीटर दूध बचा लेता है? और वह एक सप्ताह में कितना लीटर दूध दही जमाने के लिए बचा लेता है?

प्र0 4. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $\frac{9}{7}+\frac{8}{5}$ (ख) $\frac{3}{13}+\frac{7}{2}$ (ग) $\frac{4}{5}+\frac{8}{7}$ (घ) $\frac{12}{3}+\frac{19}{6}$

प्र0 5. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $\frac{13}{21}-\frac{3}{19}$ (ख) $\frac{15}{11}-\frac{5}{18}$ (ग) $\frac{19}{3}-\frac{2}{5}$ (घ) $\frac{28}{21}-\frac{11}{15}$

प्र0 6. चिन्हों को समझते हुए हल करें। (क) $7\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$ (ख) $1\frac{4}{7}+3$ (ग) $3\frac{11}{13}-2$ (घ) $24-3\frac{2}{5}$

प्र0 7. दी गई त्रिज्या के आधार पर वृत्त बनाएँ जिसकी लम्बाई, 2.5 सेंमी., 6.8 सेंमी., 9 सेंमी., 9.5 सेंमी. आदि हो।

आओ सोचें और हल करें

प्र0 1.

एक प्राथमिक विद्यालय की पहली कक्षा में कुल 20 विद्यार्थी हैं। दूसरी कक्षा में कुल 25 विद्यार्थी हैं। तीसरी कक्षा में कुल 20 विद्यार्थी और चौथी कक्षा में कुल 25 विद्यार्थी हैं। विद्यालय में कुल 125 बच्चे नामांकित हैं। एक सोमवार को दूसरी कक्षा में पहली कक्षा से 10 बच्चे ज़्यादा उपस्थित थे। और तीसरी कक्षा में पहली व दूसरी कक्षा के कुल उपस्थित बच्चे से आधे उपस्थित थे। चौथी कक्षा में तीसरी कक्षा से 5 बच्चे ज़्यादा उपस्थित थे, सोमवार को पहली कक्षा में कुल 8 बच्चे उपस्थित थे। पाँचवीं कक्षा में चौथी कक्षा से 6 बच्चे ज़्यादा उपस्थित थे।

क). सोमवार को विद्यालय में कितने बच्चे कम उपस्थित थे?

ख). सोमवार को चौथी कक्षा में कितने बच्चे कम उपस्थित थे?

घ). विद्यालय में कक्षा–5 में कुल कितने विद्यार्थी नामांकित हैं?

ग). किस कक्षा के नामांकित विद्यार्थियों की संख्या और सोमवार को उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या का अन्तर सबसे अधिक है?

हलः क) इन प्रश्नों को एक–एक करके हल करते हैं।
दिये गये सवाल से,

पहली कक्षा में उपस्थित बच्चे हैं = 8 बच्चे

दूसरी कक्षा में उपस्थित बच्चे हैं = पहली कक्षा के उपस्थित बच्चे से 10 बच्चे अधिक हैं यानि

= 8 + 10

= 18 बच्चे

तीसरी कक्षा में उपस्थित बच्चे हैं = पहली और दूसरी कक्षा के उपस्थित बच्चे का आधा हैं यानि

= (8 + 18) का आधा

= 26 का $\frac{1}{2}$

= $26 \times \frac{1}{2}$ या $26 \div 2$

= $26 \div 2$

= 13 बच्चे

चौथी कक्षा में उपस्थित बच्चे हैं = तीसरी कक्षा में उपस्थित बच्चे से 5 अधिक हैं यानि

= 13 + 5

= 18 बच्चे

पाँचवीं कक्षा में उपस्थित बच्चे हैं = चौथी कक्षा में उपस्थित बच्चे से 6 अधिक हैं यानि चौथी कक्षा के 18 बच्चे और 6 अधिक बच्चे = 18 + 6

= 24 बच्चे

यानि,

सोमवार के दिन अनुपस्थित

बच्चे = कुल नामांकित – उपस्थित कुल बच्चे

= 125 – (8 + 18 + 13 + 18 + 24)

= 125 – 81

= 44 बच्चे

अर्थात् सोमवार को विद्यालय में 44 बच्चे कम उपस्थित थे।

हलः ख)

सोमवार को चौथी कक्षा में उपस्थित

बच्चे = तीसरी कक्षा में उपस्थित बच्चे से 5 अधिक हैं यानि

= 13 + 5

= 18 बच्चे

यानि,

सोमवार को चौथी कक्षा में अनुपस्थित

बच्चे = चौथी कक्षा में नामांकित बच्चे – उपस्थित बच्चे

= 25 – 18

= 7 बच्चे

अर्थात् सोमवार को चौथी कक्षा में 7 बच्चे कम उपस्थित थे।

हलः ग)

कक्षा 5 में नामांकित बच्चे = विद्यालय में कुल नामांकित बच्चे – पहली, दूसरी, तीसरी और चौथी कक्षा में कुल नामांकित बच्चे

= 125 – (20 + 25 + 20 + 25)

= 125 – 90

= 35 बच्चे

अर्थात् पाँचवीं कक्षा में 35 बच्चे नामांकित हैं।

हलः घ)

पहली कक्षा में नामांकित और उपस्थित बच्चों की संख्या का अन्तर = 20 – 8

= 12

दूसरी कक्षा में नामांकित और उपस्थित बच्चों की संख्या का अन्तर = 25 – 18

= 7

तीसरी कक्षा में नामांकित और उपस्थित बच्चों की संख्या का अन्तर = 20 – 13

= 7

चौथी कक्षा में नामांकित और उपस्थित बच्चों की संख्या का अन्तर = 25 – 18

= 7

पाँचवीं कक्षा में नामांकित और उपस्थित बच्चों की संख्या का अन्तर = 35 – 24

= 11

अर्थात् पहली कक्षा में नामांकित और उपस्थित बच्चों की संख्या का अन्तर सबसे अधिक 12 है।

प्र0 2. नीचे दिए गए भिन्नों को हल करें।

$$\frac{7}{10} + \frac{9}{25} = ?$$

हलः $\frac{7}{10} + \frac{9}{25}$ में 10 और 25 का ल0स0

5	10, 25
2	2, 5
5	1, 1
	1, 1

ल0स0 = 5 × 2 × 5
= 50

$$= \frac{7 \times 5}{10 \times 5} + \frac{9 \times 2}{25 \times 2}$$

ल0स0 को हर 10 से भाग करने के बाद 5 प्राप्त हुआ अंश व हर को 5 से गुणा करने पर।

ल0स0 को हर 25 से भाग करने के बाद 2 प्राप्त हुआ अंश व हर को 2 से गुणा करने पर।

$$= \frac{35}{50} + \frac{18}{50}$$

$$= \frac{35 + 18}{50}$$

$$= \frac{53}{50}$$

अतः $\frac{7}{10} + \frac{9}{25} = \frac{53}{50}$

प्र0 3. नीचे दिए गए भिन्नों को हल करें।

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{10}$$

हलः $\frac{4}{5} - \frac{7}{10}$ में 5 और 10 का ल0स0

5	5, 10
2	1, 2
	1, 1

ल0स0 = 5 × 2
= 10

$$= \frac{4 \times 2}{5 \times 2} - \frac{7 \times 1}{10 \times 1}$$

ल0स0 को हर 5 से भाग करने के बाद 2 प्राप्त हुआ अंश व हर को 2 से गुणा करने पर।

ल0स0 को हर 10 से भाग करने के बाद 1 प्राप्त हुआ अंश व हर को 1 से गुणा करने पर।

$$= \frac{8}{10} - \frac{7}{10}$$
$$= \frac{8 - 7}{10}$$
$$= \frac{1}{10}$$

अतः $\frac{4}{5} - \frac{7}{10} = \frac{1}{10}$

प्र0 4. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

क) $3\frac{1}{2} + 5\frac{2}{3}$

हल:

2	2, 3
3	1, 3
	1, 1

भिन्न के हर असमान हैं इसलिए 2 और 3 का ल0स0 निकालने पर।

ल0स0 = 2 × 3
= 6

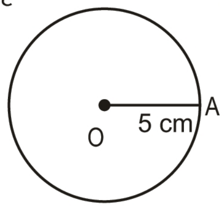
हर समान है अतः अंश को आपस में जोड़ लेंगे।

$$= \frac{2 \times 3 + 1}{2} + \frac{3 \times 5 + 2}{3}$$
$$= \frac{6 + 1}{2} + \frac{15 + 2}{3}$$
$$= \frac{7}{2} + \frac{17}{3}$$
$$= \frac{7 \times 3}{2 \times 3} + \frac{17 \times 2}{3 \times 2}$$
$$= \frac{21}{6} + \frac{34}{6}$$
$$= \frac{21 + 36}{6}$$
$$= \frac{57}{6}$$
$$= 9\frac{3}{6}$$

अतः $3\frac{1}{2} + 5\frac{2}{3} = 9\frac{3}{6}$

प्र0 5. दिए गए वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

क)

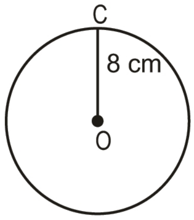


हल:

दिए गए वृत्त में वृत्त की त्रिज्या OA = 5 cm है।
अतः r = 5 cm

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$
$$= \pi \times 5 \times 5$$
$$= \pi \times 25$$
$$= \frac{22}{7} \times 25$$
$$= \frac{550}{7}$$
= 78.57 सेंटीमीटर

ख)



हल:

दिए गए वृत्त में वृत्त की त्रिज्या OC = 8 cm है।
अतः r = 8 cm

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$
$$= \pi \times 8 \times 8$$
$$= \pi \times 64$$
$$= \frac{22}{7} \times 64$$
$$= \frac{1408}{7}$$
= 201.14 सेंटीमीटर

प्र0 6. चिन्हों को समझते हुए हल करें।

क) $5\frac{1}{4} - \frac{3}{11}$

हल:

2	4, 11
2	2, 11
11	1, 11
	1, 1

भिन्न के हर असमान हैं इसलिए 4 और 11 का ल0स0 निकालने पर।

ल0स0 = 2 × 2 × 11
= 44

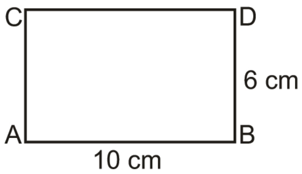
हर समान है अतः अंश को आपस में घटा लेंगे।

$$= \frac{4 \times 5 + 1}{4} - \frac{3}{11}$$
$$= \frac{20 + 1}{4} - \frac{3}{11}$$
$$= \frac{21}{4} - \frac{3}{11}$$
$$= \frac{21 \times 11}{4 \times 11} - \frac{3 \times 4}{11 \times 4}$$
$$= \frac{231}{44} - \frac{12}{44}$$
$$= \frac{231 - 12}{44}$$
$$= \frac{219}{44}$$
$$= 4\frac{43}{44}$$

अतः $5\frac{1}{4} - \frac{3}{11} = 4\frac{43}{44}$

प्र0 7. दी गई आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

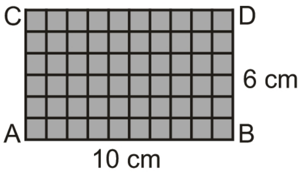
क)



हल:

दी गई आकृति ABCD एक आयत है, वहाँ AB = 10 cm तथा BC = 6 cm है।

आयत का क्षेत्रफल = ल0 × चौ0

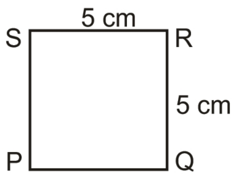


= 10 cm × 6 cm

= 60 cm^2

अत: ABCD का क्षेत्रफल = 60 cm^2

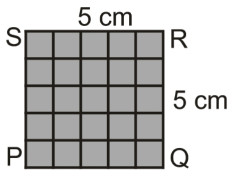
ख)



हल:

दी गई आकृति में PQ = QR = RS = SP सभी रेखाखण्ड बराबर है इसलिए यह एक वर्ग है।

PQRS का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा



= 5 cm × 5 cm

= 25 cm^2

अत: PQRS का क्षेत्रफल = 25 cm^2

आओ सोचें और हल करें

S-7.1

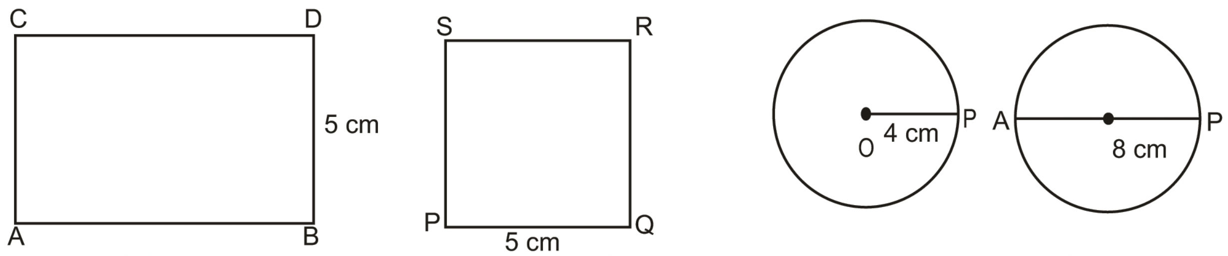
प्र0 1. रमेश और रोहित एक दिन मेले में गए। रमेश ने 45 रुपये की जलेबी ख़रीदी जिसमें से 15 रुपये रोहित ने दिए। खिलौनों की दुकान से 150 रुपये में रमेश ने 3 कार तथा रोहित ने 2 कार ख़रीदीं। लेकिन रोहित के पास केवल 100 रुपये ही थे इसलिए बाकी रुपये रमेश ने दुकानदार को दिए। लौटते समय रमेश के पास 50 रुपये बच गए थे। बताएँ,

क) रमेश और रोहित कितने–कितने रुपये लेकर मेले में गए थे?
ख) रोहित की एक कार का दाम रमेश की कार के दाम से कितनी अधिक है?
ग) रमेश को रोहित से कितने रुपये लेने बाकी हैं?
घ) मेले में रमेश और रोहित ने कितने–कितने रुपये ख़र्च किए?

प्र0 2. नीचे दिए गए भिन्नों को हल करें।

$\frac{2}{9}+\frac{7}{15}=?$ $\quad$ $\frac{2}{9}+\frac{7}{15}=?$ $\quad$ $\frac{2}{9}+\frac{7}{15}=?$ $\quad$ $\frac{7}{24}-\frac{13}{15}=?$ $\quad$ $\frac{25}{36}-\frac{17}{12}=?$

प्र0 3. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



S-7.2

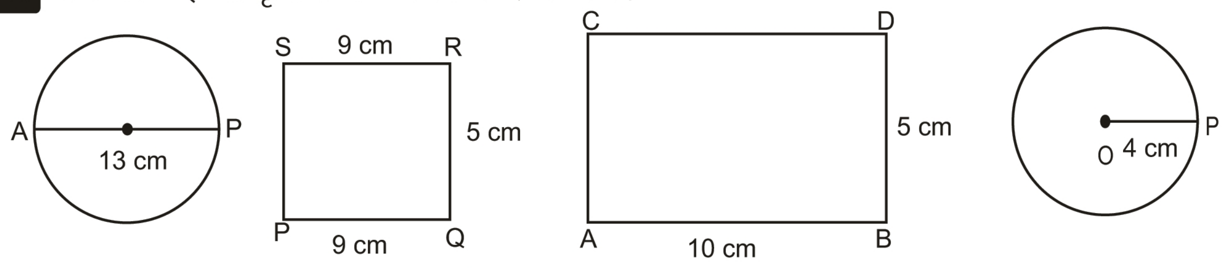
प्र0 1. राजू काम पर जाने के लिए घर से निकला। मनकापुर से ऑटो के द्वारा कनकापुर जाने में 3 घण्टे लगे। ऑटो 1 घण्टे में 10 किलोमीटर जाती है। राजू कनकापुर से बस द्वारा सोलापुर गया। कनकापुर से सोलापुर की दूरी, मनकापुर से कनकापुर की दूरी से दोगुनी है। बस 1 घण्टे में 30 किलोमीटर जाती है। राजू सोलापुर से रामगढ़ आटो के द्वारा 2 घण्टे में पहुँचता है। ऑटो 1 घण्टे में 10 किलोमीटर जाती है तो बताएँ,

क) मनकापुर से रामगढ़ तक जाने में राजू को कितना समय लगा?
ख) कनकापुर से सोलापुर बस से जाने में कितना समय लगा?
ग) कनकापुर से रामगढ़ की दूरी कितनी है?
घ) मनकापुर से रामगढ़ की दूरी कितनी है?
च) कनकापुर से रामगढ़ बस से जाने में कितना समय लगेगा?

प्र0 2. नीचे दिए गए भिन्नों को हल करें।

$\frac{2}{9}+\frac{5}{12}=?$ $\quad$ $\frac{1}{3}+\frac{7}{12}=?$ $\quad$ $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=?$ $\quad$ $\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=?$ $\quad$ $\frac{4}{5}-\frac{2}{4}=?$ $\quad$ $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=?$

प्र0 3. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



आओ सोचें और हल करें

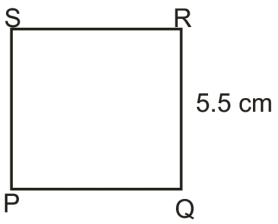
प्र0 1. महक और मनीष गाँव में घूम–घूम कर दाल बेचते हैं। दोनों ने एक दुकान से 60–60 किलो दाल ख़रीदी। दाल बेचने के लिए दोनों अलग–अलग गाँव में गए। महक एक घर में 4 किलो दाल 55 रुपये प्रति किलो के दाम से बेचती है। दूसरे घर में 6 किलो गेहूँ के बदले में 1 किलो दाल दिया तथा सात रुपये वापस भी किया। उधर मनीष 3 किलो दाल 50 रुपये प्रति किलो के हिसाब से तथा 5 किलो 60 रुपये प्रति किलो के हिसाब से बेचता है तो बताएँ :

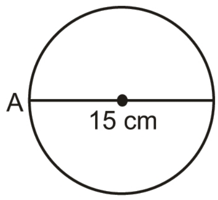
क) महक पहले घर में कितने रुपये की दाल बेचती है?
ख) 6 किलो गेहूँ की क़ीमत कितनी थी?
ग) मनीष ने कितने रुपये की दाल बेची?
घ) महक और मनीष को मिलाकर दाल बेचने से कितने रुपये की प्राप्ति हुई?

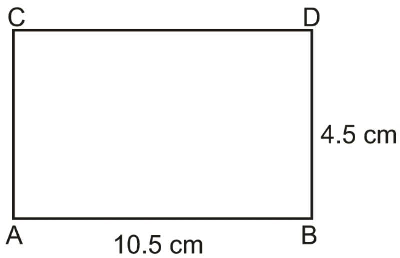
प्र0 2. नीचे दिए गए भिन्नों को हल करें।

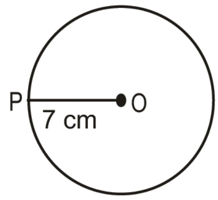
$\frac{5}{12}+\frac{1}{36}=?$ $\frac{7}{12}+\frac{5}{8}=?$ $\frac{3}{10}+\frac{8}{15}=?$ $3\frac{1}{3}-3\frac{1}{6}=?$ $2\frac{7}{10}-2\frac{3}{8}=?$ $2\frac{13}{21}-2\frac{3}{7}=?$

प्र0 3. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।









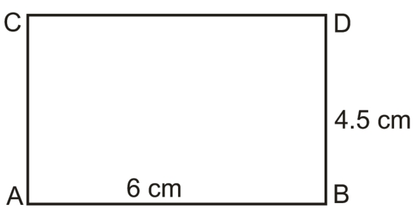
प्र0 1. सोहन के चाचा की शादी थी। बारातियों के लिए 1 बस, 3 जीप तथा 1 कार बुलाई गई। बस में 45 व्यक्ति, तीनों जीपों को मिलाकर 42 व्यक्ति तथा कार में 6 व्यक्ति बैठे थे। प्रत्येक जीप में बराबर–बराबर व्यक्ति थे। आगे श्यामपुर में सभी बाराती जलपान के लिए रुके। 15 व्यक्ति केवल एक–एक कप चाय पीए। बाकी सभी व्यक्तियों ने दो–दो समोसे खाए। ज़रूरी काम पड़ जाने से वहीं से 26 व्यक्ति घर वापस लौट गए। शाम में बारात पहुँच गई। तो बताएँ :

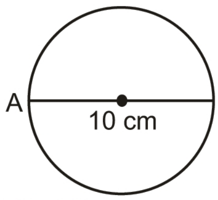
क) घर से कितने बाराती निकले थे?
ख) बारात निकलने के समय प्रत्येक जीप में कितने व्यक्ति बैठे थे?
ग) सोहन के चाचा की शादी में कितने व्यक्ति पहुँचे?
घ) जलपान में बारातियों ने कुल कितने समोसे खाए?
च) कार में बैठे व्यक्तियों का कितना गुना तीनों जीपों में बाराती बैठे थे?

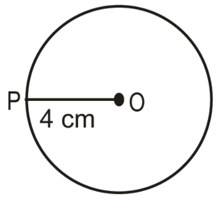
प्र0 2. नीचे दिए गए भिन्नों को हल करें।

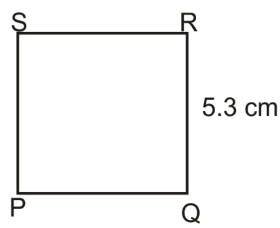
$2\frac{1}{2}+2\frac{7}{8}=?$ $3\frac{4}{9}+3\frac{6}{8}=?$ $3\frac{3}{4}+3\frac{8}{9}=?$ $2\frac{17}{12}-2\frac{4}{9}=?$ $2\frac{8}{11}-2\frac{9}{13}=?$ $2\frac{8}{13}-2\frac{7}{26}=?$

प्र0 3. नीचे दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



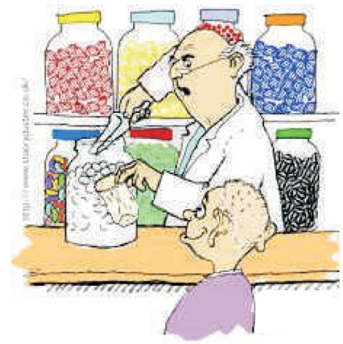






एक और दो चर वाले रैखिक समीकरण (Equation) का परिचय एवं अवधारणा

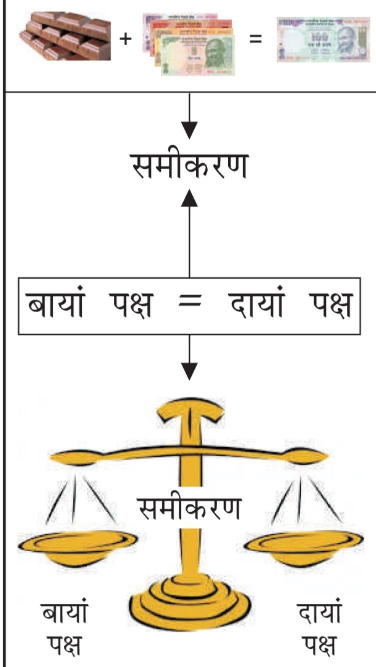
आप अक्सर बाज़ार तो जाते ही होंगें! कुछ ख़रीदारी करने जैसे, चॉकलेट, मिठाईयाँ, कपड़े इत्यादि। कभी आप अकेले जाते होंगे, कभी मम्मी–पापा के साथ और कभी दोस्तों के साथ। मान लीजिए आप 100 रुपए लेकर बाज़ार गए और अपने–अपने लिए कुछ चॉकलेट खरीदीं। चॉकलेट के पैसे देने के बाद बचे पैसे और चॉकलेट लेकर आप घर आ गए। अब अगर मम्मी आपसे इसका हिसाब माँगे तो आप उन्हें क्या कहेंगे?



यही न कि, जो 100 रुपये उन्होंने आपको दिए थे, उसकी जगह अब आपके पास कुछ चॉकलेट और बचे हुए रुपये हैं। गणित की भाषा में लिखकर इसे बताना हो तो कैसे बताएंगे ?

चॉकलेट में लगे पैसे + बचे पैसे = 100, सही है न ?

बिल्कुल सही इसे ही गणित का एक समीकरण (Equation) कहा जाता है। समीकरण में बायां पक्ष (L.H.S.) और दायां पक्ष (R.H.S.) हमेशा बराबर होता है और इसलिए इसे '=' चिन्ह के साथ दिखाते हैं।



हमारा तराज़ु भी तो एक समीकरण जैसा दिखता है।

अब मान लीजिए मम्मी आपसे ये पूछे कि चॉकलेट कितनी हैं और बचे पैसे कितने हैं तो आप चॉकलेट एवं बचे हुए पैसों को गिनकर उन्हें बता देते हैं। मान लीजिए हैं 8 चॉकलेट हैं और 20 रुपए बचे हैं तो अब आपका समीकरण कुछ ऐसा दिखेगा–

8 चॉकलेट में लगे पैसे + 20 = 100

अच्छा, पता है! अगर आपको एक चॉकलेट की क़ीमत मालूम नहीं है तो आप इस समीकरण से वह भी निकाल सकते हैं, शर्त बस यह है कि सभी चॉकलेट की क़ीमत एक समान होनी चाहिए। मान लीजिए एक चॉकलेट की क़ीमत x रुपये (x कोई संख्या है जिसका मान अभी मालूम नहीं है।) देखते हैं, अब हमारा समीकरण कैसा दिखेगा?

$$8x + 20 = 100$$

इस समीकरण को हल करने पर x का मान निकलेगा जो कि हमारे एक चॉकलेट की क़ीमत होगी। इसे कैसे हल करना है, यह हम बाद में दखेंगे, पहले अपने समीकरण की थोड़ी और बात कर लें।

इस समीकरण में हम देख सकते हैं कि x ही ऐसा है जिसका मान हमें पता नहीं या यूँ कहें कि इसका मान समीकरण के अनुसार बदलेगा, जबकि बाकी संख्याएं अचर (Constant) हैं और उनका मान कभी नहीं बदलता। जिनका मान अलग–अलग परिस्थितियों में बदल सके, उसे चर (Variable) कहते हैं। इस समीकरण को हम **एक चर वाला समीकरण** कह सकते हैं।

चर – मैं तो हमेशा बदलता रहता हूँ।

हमारा अपना समीकरण

$$8x + 20 = 100$$

अचर – मेरा मान कभी नहीं बदलता

चलिए, एक क़दम आगे चलते हैं। मान लीजिए अगली बार पापा बाज़ार गए। वे आपकी तरह चॉकलेट न ख़रीदकर आलू और प्याज़ ख़रीदकर ले आए। जब उन्होंने मम्मी से सुना कि आप इसे गणित के समीकरण के रूप में लिख सकते हैं तो उन्होनें आपको बताया कि वे 280 रुपये लेकर बाज़ार गए थे एवं 5 किलो आलू और 3 किलो प्याज़ लेने के बाद उनके पास अब 90 रुपये बचे हैं और ऐसा कहकर उन्होनें इसे समीकरण के रूप में लिखने की चुनौती आपको दे डाली। अब आप क्या करेंगे?

पहले और अब की परिस्थिति में जो एक अंतर दिखता है वह ये कि अब एक की जगह दो अलग-अलग चीज़ें ख़रीदी गई हैं, मतलब अब हमें **एक** नहीं **दो** चर चाहिए होंगे, जैसे : x एवं y मान लेते हैं कि आलू की क़ीमत x रुपये प्रति किलोग्राम है जबकि प्याज़ की क़ीमत y रुपये प्रति किलोग्राम है तो ये हमारा समीकरण हो जाएगा-

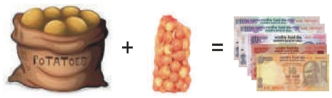
5x + 3y + 90 = 280, ठीक है न? यह दो चर वाला रैखिक समीकरण है।
आप चाहें तो इसे आसान बनाते हुए दायें पक्ष को '0' भी बना सकते हैं। इसके लिए हमें दायें पक्ष के सभी पदों (terms) को बायीं ओर लाना होगा और इस क्रम में उनके चिन्ह भी गणित के नियम अनुसार बदलेंगे।
जैसे -

$$5x + 3y + 90 - 280 = 0$$
$$\Rightarrow 5x + 3y - 190 = 0$$

अच्छा ये सोचिये कि पापा इतने ही रुपये में 5 किलो आलू की जगह 4 किलो आलू एवं 3 किलो प्याज़ की जगह 6 किलो प्याज़ लाए होते तो यह समीकरण कैसा दिखता?
शायद, $4x + 6y - 190 = 0$ है न ?
मतलब आलू, प्याज़ और रुपये बदलते रह सकते हैं पर ये हमेशा $ax+by+c = 0$ के रूप में ही होगा जहाँ a, b और c अचर हैं। कुछ ऐसा जैसे नीचे दिखाया गया है -

a	b	c	ax + by + c = 0
2	3	10	$2x + 3y + 10 = 0$
5	-7	8	$5x - 7y + 8 = 0$
8	$\frac{3}{4}$	-20	$8x + \frac{3}{4}y - 20 = 0$
-1.2	5	0	$-1.2x + 5y + 0 = 0$

अचर ऐसी चीज़/मान होती है जो कभी नहीं बदलती जैसे : 'आलू' हमेशा 'आलू' रहेगा, कभी प्याज़ नहीं हो सकता।
'2' हमेशा '2' रहेगा 3, 4 या 1 नहीं हो सकता।



→ x रुपए प्रति किलो

→ y रुपए प्रति किलो

$ax + b = 0$ → एक चर वाला रैखिक समीकरण

$ax + by + c = 0$ → दो चर वाला रैखिक समीकरण

पक्ष बदलने से चिन्ह अपने विलोम चिन्ह में बदल जाते हैं।
जैसे :
'+' → '–'
'–' → '+'
'×' → '÷'
'÷' → '×'

दो चर वाले समीकरणों (Equations) को हल करना

ऐसे समीकरण जिसमें दो चर होते हैं, उन्हें हम $ax + by + c = 0$ (इसे हम **ax जोड by जोड़ c बराबर जीरो**, ऐसा पढ़ेंगे) के रूप में लिखते हैं और ये **दो चर वाले रैखिक समीकरण** कहलाते हैं।

उदाहरण 1 : $2x + 3y + 5 = 0$ *में, a, b, c का मान निकालें।*

पहला चरण : दिए गए समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखते हैं।

$$ax + by + c = 0$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$2x + 3y + 5 = 0$$

दूसरा चरण : तुलना करने पर,

$a = 2$
$b = 3$
$c = 5$

उदाहरण 2 : $2x + \ 7 = 9y$ में a, b, c का मान निकालें।

पहला चरण : दिए गए समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखते हैं।

$2x + \ 7 = 9y$ (पक्ष बदलने पर '+9y', '–9y' में बदल गया)

$\Rightarrow 2x - 9y + \ 7 = 0$

$ax + by + c = 0$

दूसरा चरण : तुलना करने पर,

$a = 2$
$b = -9$
$c = \ 7$

उदाहरण 3 : $9y - 3x = 4.7$ में a, b, c का मान निकालें।

पहला चरण : दिए गए समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखते हैं।

$9y - \ 3x = 4.7$

$\Rightarrow 9y - 3x - 4.7 = 0$

$\Rightarrow -3x + 9y - 4.7 = 0$

$ax + by + c = 0$

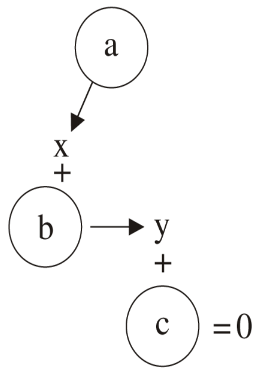
दूसरा चरण : तुलना करने पर,

$a = -3$
$b = 9$
$c = -4.7$

I. निम्न समीकरणों में a, b, c का मान निकालें।

i) $\sqrt{3}x + 5 = \sqrt{7}y$ ii) $y - \frac{1}{2}x + 3 = 4$

iii) $2y = 17$ iv) $3x - 5.2 = -10x$



$ax + by + c = 0$ → दो चर वाला रैखिक समीकरण

आप भी a, b एवं c के अलग-अलग मान लेकर कुछ नए समीकरण बनाइए।

'$\sqrt{\ }$' वर्गमूल (square root) का चिन्ह होता है।

'$\sqrt{7}$' को '7 का वर्गमूल' ऐसा पढ़ते हैं।

$\sqrt{7} = (7)^{1/2}$

$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$

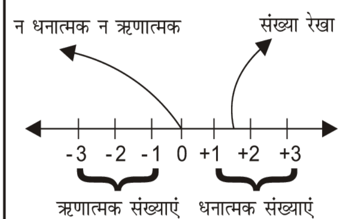
ऐसे ही,

'$\sqrt{x}$' मतलब 'x का वर्गमूल'

$\sqrt{x} = (x)^{1/2}$

$\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$

मतलब किसी भी संख्या के वर्गमूल को उसी से गुणा करने पर वह संख्या मिलती है।



दशमलव संख्याएं

1.2, 2.3, 4.7, –5.2 ...

भिन्न संख्याएं

$\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \ldots$

उदाहरण 4 : 7 कुर्ते और 5 पाजामों के लिए 24 मीटर कपड़े की आवश्यकता है, इसे दो चर वाले रैखिक समीकरण के रूप में लिखें।

हल : माना कि एक कुर्ते के लिए x मीटर एवं एक पाजामा के लिए y मीटर कपड़ों की आवश्यकता है।

प्रश्न से,

$7x + 5y = 24$

$\Rightarrow 7x + 5y - 24 = 0$

$\therefore 7x + 5y - 24 = 0$ अभीष्ट (जो चाहिए वह, required) समीकरण है।

II. <u>निम्न परिस्थितियों के लिए दो चर वाले रैखिक समीकरण लिखें।</u>

i) गीता 58 पन्नों की एक किताब पढ़ रही है जिसके कुछ पन्नों में कहानियाँ हैं और शेष में कविताएं हैं।

ii) रवि हर रोज़ अपने 2 बिल्लियों और 3 कुत्तों को 25 बिस्किट खाने के लिए देता है।

iii) 3 बाल्टियों और 5 बोतलों में मिलाकर 55 लीटर पानी आता है।

बेहतर समझ के लिए प्रश्नावली 4.1 का अभ्यास करें। (कक्षा–9, एन.सी.ई.आर.टी.)

दो चर वाले रैखिक समीकरण का उत्तर निकालना :

अच्छा, अब हम वापस अपने चॉकलेट की ख़रीदारी पर वापस लौटते हैं।

हमारा समीकरण था,

$$8x + 20 = 100$$

इसे हल करने पर,

$\Rightarrow 8x = 100 - 20$

$\Rightarrow 8x = 80$

$\therefore x = \frac{80}{8} = 10$

मतलब, एक चॉकलेट की कीमत 10 रूपए है।

क्या ऐसे ही आप पापा के लाए आलू और प्याज़ की क़ीमत निकाल सकते हैं ? चलिए करके देखते हैं। वह समीकरण था:

$5x + 3y - 190 = 0$

हल करने पर,

$3y = 190 - 5x$

$\therefore y = \frac{190 - 5x}{3}$

रैखिक का मतलब समीकरण का घात (power) '1' होगा।

घात क्या होता है?

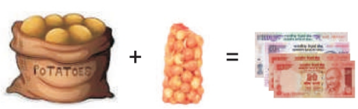
10^5 → घात (power)

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

मतलब जिस चर या अचर पर जितना घात होता है उतनी बार उस चर या अचर का गुणा होता है।

$x^n = x . x . x ....$ (n बार)

$y^m = y . y . y ....$ (m बार)



5 किलो   3 किलो

यहाँ दो चर हैं और उनका मान हम सीधे-सीधे नहीं निकाल सकते क्योंकि वे एक-दूसरे पर निर्भर हैं। फिर इनका मान कैसे निकालें?

इसके लिए हम एक वस्तु की क़ीमत स्वयं मानते हैं और उसके अनुसार दूसरी वस्तु की क़ीमत निकल आती है। इसका मतलब यह हुआ कि जैसे-जैसे पहली वस्तु की क़ीमत बदलेगी, दूसरी वस्तु की क़ीमत भी वैसे-वैसे बदलेगी और ऐसे अनगिनत उत्तरों के जोड़े हम पा सकते हैं।

इसलिए दो चर वाले समीकरणों के अनगिनत उत्तर हो सकते हैं। हम चाहें तो इसके लिए एक सारणी (टेबल) भी बना सकते हैं।

अपने समीकरण $y = \frac{190 - 5x}{3}$ के लिए,

x	14	5	20	23	....
y	40	55	30	25	....

$ax + by + c = 0$
$5x + 3y - 190 = 0$

$14 \times 5 = 70$ रुपए के आलू
और
$40 \times 3 = 120$ रुपए के प्याज़
कुल रुपए $= 70 + 120 = 190$

और इस सारणी से जितने चाहें, उतने उत्तर हम निकाल सकते हैं।

उदाहरण 5 :

हम जानते हैं कि किसी रैखिक समीकरण जिसमें दो चर होते हैं, उनके अनगिनत उत्तर होते हैं। **दिए गए समीकरणों के तीन-तीन उत्तर निकालें।**

i) $2x + 3y - 8 = 0$ ii) $x - 5y = 0$ iii) $7x + 3 = 17$

हल : i) $2x + 3y - 8 = 0$

$\Rightarrow 2x + 3y = 8$

$\Rightarrow 3y = 8 - 2x$

$\therefore y = \frac{8 - 2x}{3}$ .... (1)

एक चर का मान दूसरे चर के रूप में
y का मान x के रूप में या
x का मान y के रूप में

हमने समीकरण को हल करते हुए एक चर का मान दूसरे चर के रूप में निकाल लिया है। अब हम x के विभिन्न मान ले सकते हैं और उसके लिए y के मान निकलते जाएंगे और प्रत्येक (x, y) अभीष्ट उत्तर होगा। इसके लिए हम एक सारणी बना लेते हैं।

x	1	4	-2		(माने गए विभिन्न मान)
y	2	0	4		(समीरकण 1 से)

$2x + 3y - 8 = 0$
$2 \times 1 + 3 \times 2 - 8 = 0$
$2 + 6 - 8 = 0$
$8 - 8 = 0$

अतः (1, 2), (4, 0) एवं (–2, 4) ये तीनों ही हल इस समीरकण के उत्तर होंगे। आप चाहें तो (x, y) के ये मान समीकरण में रखकर अपने उत्तर की पुष्टि कर सकते हैं।

हल : ii) $x - 5y = 0$

$\Rightarrow -5y = -x$

$\Rightarrow 5y = x$

$\therefore y = \frac{x}{5}$

अब x के अलग-अलग मान रखने पर संगत (Corresponding) y के मान,

x	0	5	–5	
y	0	1	–1	

अतः (0, 0), (5, 1) एवं (–5, –1) ये तीनों ही हल इस समीकरण के उत्तर होंगे।

हल : iii) $7x + 3 = 17$

$\Rightarrow 7x = 17 - 3$

$\Rightarrow 7x = 14$

$\therefore x = \frac{14}{7} = \mathbf{2}$

यहाँ समीकरण में y नहीं है किन्तु निर्देशांक (coordinates) लिखने के लिए हमें x एवं y दोनों ही चाहिए। अगर इस समीकरण को हम $7x + 0y + 3 = 17$ लिखें तो समीकरण नहीं बदलेगा क्योंकि $0.y = 0$ और 0 जोड़ने से समीकरण में कोई अंतर नहीं आएगा। इसलिए $x = 2$ एवं y के सभी मानों के लिए यह समीकरण (y के हर मान के लिए $0.y = 0$) वैध होगा। अर्थात (2, 0), (2, 1) एवं (2, 2) ये सारे इस समीकरण के उत्तर होंगे।

(x अक्ष का बिन्दु, y अक्ष का बिन्दु)
↓
निर्देशांक (Cordinates) → (x,y)

नोट : दो चर वाले रैखिक समीकरणों के उत्तरों में x एवं y के मान का क्रम महत्त्वपूर्ण है और इसमें बदलाव करने से समीकरण प्रभावित होगा।

$(x, y) \neq (y, x)$

दो चर वाले रैखिक समीकरण

II) निम्न समीकरणों के चार-चार उत्तर निकालें।

i) $7x + 9y - 14 = 0$ ii) $3x + 3y = 0$

iii) $\frac{3}{4}x + 9 = 18$ iv) $2x + 5y - 7 = 3x + 4x + 7$

परिस्थिति आधारित समीकरण बनाना एवं उनके उत्तर निकालना:

उदाहरण 6 : एक जैसी दो किताबों और तीन कॉपियों की क़ीमत 100 रुपये है। अगर दोनों किताबों की क़ीमत समान है और तीनों कॉपियों की क़ीमत भी समान हैं तो एक किताब एवं एक कॉपी की अलग-अलग क़ीमत निकालें। (एक उत्तर पर्याप्त होगा।)

हल : मान लें एक किताब की क़ीमत = x रुपये

एवं एक कॉपी की क़ीमत = y रुपये

प्रश्न से,

$2x + 3y = 100$

$\Rightarrow 2x = 100 - 3y$

$\therefore x = \frac{100 - 3y}{2}$ (यहाँ y का मान 10 माना गया है)

अब y = 10 रखने से,

$x = \frac{100 - 3 \times 10}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{100 - 30}{2}$

$\therefore x = \frac{\cancel{70}\,35}{\cancel{2}} = \mathbf{35}$

$\therefore$ एक किताब की क़ीमत = x रुपये = 35 रुपये

एवं एक कॉपी की क़ीमत = y रुपये = 10 रुपये

अतः (35, 10) इस समीकरण का एक संभव उत्तर है।

नोट : y के दूसरे मान के लिए भी x का कुछ मान आएगा। अतः ऐसे सवाल के एक से अधिक उत्तर हो सकते हैं।

III. i) 4 किलो लड्डू और 3 किलो पेड़े की क़ीमत 980 रुपये हैं तो 1 किलो लड्डू और 1 किलो पेड़े की एक संभावित क़ीमत निकालें।

ii) रोशनी 2 घंटे बस और आधे घंटे पैदल चल कर अपनी नानी के घर तक की 90 किमी. की दूरी तय करती है। बस की चाल और उसके पैदल की चाल निकालें।

बेहतर समझ के लिए प्रश्नावली 4.2 का अभ्यास करें। (कक्षा-9, एन.सी.ई.आर.टी.)

दो चर वाले समीकरणों को ग्राफ़ में दर्शाना

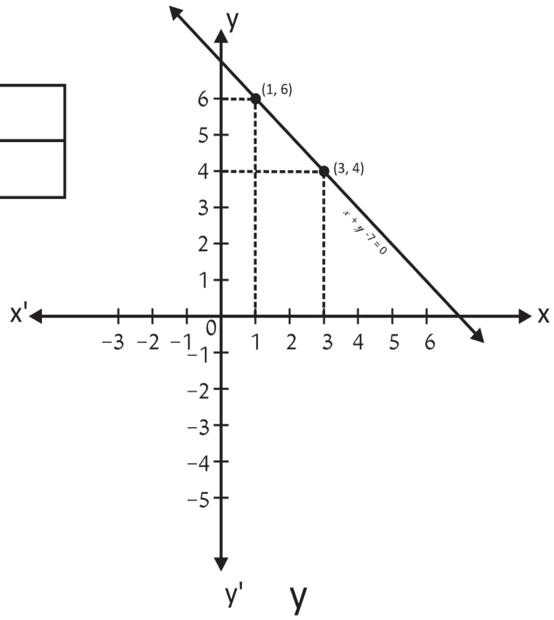
हर समीकरण को हम चित्र रूप में भी दिखा सकते हैं। गणित में ऐसा चित्र **'ग्राफ़'** कहलाता है।

आपने **कार्तीय तल (Cartesian plane)** का नाम सुना तो ही होगा। इस तल के दो अक्षों (axis) x एवं y पर ये ग्राफ़ बनाए जा सकते हैं।

किसी समीकरण का चित्र या ग्राफ़ बनाने के लिए हमें सिर्फ़ **दो** उत्तर (दो निर्देशांक) चाहिए होते हैं।

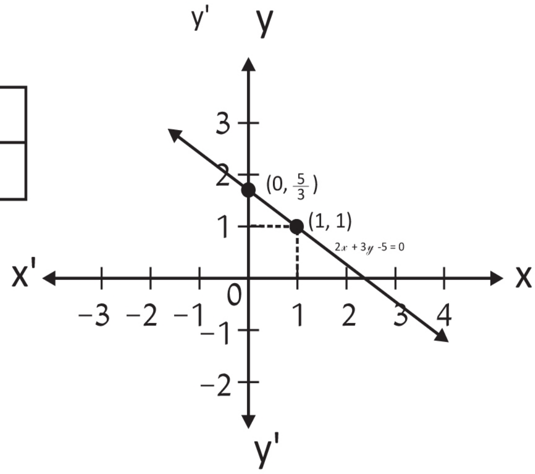
$x + y - 7 = 0$

x	1	2	3	
y	6	5	4	



$2x + 3y - 5 = 0$

x	1	0	2	
y	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	



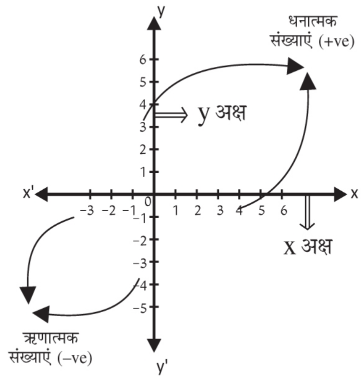
ऐसे समीकरणों के ग्राफ़ के साथ आप एक ख़ास बात नोट कर सकते हैं कि इनका ग्राफ़ हमेशा एक सरल रेखा होती हैं। इसी वजह से ऐसे समीकरण **रैखिक समीकरण** कहलाते हैं। **रैखिक समीकरण का घात 1 होता है।**

दो चर वाले रैखिक समीकरण :

हम जानते हैं कि रैखिक समीकरणों का ग्राफ़ हमेशा एक सरल रेखा होती है। दो और बातें जो ग्राफ़ के बारे में हमें जाननी चाहिए :

(i) किसी समीकरण के ग्राफ़ पर स्थित हर निर्देशांक (x, y) समीकरण को संतुष्ट करता है।

संख्या रेखा एवं कार्तीय तल का परिचय



इसमें x एवं y दो अक्ष (axis) हैं।
x के दाहिनी ओर धनात्मक
$(+1, +2, +3 .....)$
एवं
बायीं ओर ऋणात्मक
$(-1, -2, -3 ....)$

y के ऊपर की ओर धनात्मक
$(+1, +2, +3 .....)$
एवं
नीचे की ओर ऋणात्मक
$(-1, -2, -3 ....)$

10^3 → घात (power)
10 x 10 x 10

(ii) कोई भी निर्देशांक (x, y) जो किसी समीकरण के ग्राफ़ पर स्थित नहीं होता वह इस समीकरण को संतुष्ट (satisfy) नहीं कर सकता।

उदाहरण 7 : दो चर वाला रैखिक समीकरणों के 'सरल रेखा' ग्राफ के साथ भी यही होता है। ऐसा एक रैखिक समीकरण बनाएं जिसका एक निर्देशांक (2, 3) है।

हल : हम जानते हैं कि एक दो चर वाले रैखिक समीकरण के अनगिनत हल हो सकते हैं और इसका विलोम भी सत्य है। अर्थात एक निर्देशांक से अनगिनत रेखाएं गुजर सकती हैं या ऐसा कह सकते हैं कि ये अनगिनत रैखिक समीकरणों का हल हो सकता है।

निर्देशांक (2, 3) के लिए

$x + y = 5$

$2x + 5y = 19$

$x + 2y = 8$

$3x + y = 9$

ये सारे समीकरण निर्देशांक (2, 3) से संतुष्ट होंगे। क्योंकि इन समीकरणों में $x = 2$ तथा $y = 3$ रखने से ये सभी समीकरणों को सन्तुष्ट करेंगे।

IV. निम्न निर्देशांकों से संतुष्ट होने वाले कम-से-कम दो रैखिक समीकरण बनाएं।

i) (4, −3)   ii) (0, 0)   iii) (0, 4)   iv) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

उदाहरण 8 : रैखिक समीकरण $2x + 3y = 5$ का कार्तीय तल पर एक ग्राफ़ बनाएं।

संकेत (Hint):- कार्तीय तल पर ग्राफ़ बनाने के लिए कम से कम दो निर्देशांक चाहिए होंगे जो समीकरण को संतुष्ट करें।

$2x + 3y = 5$

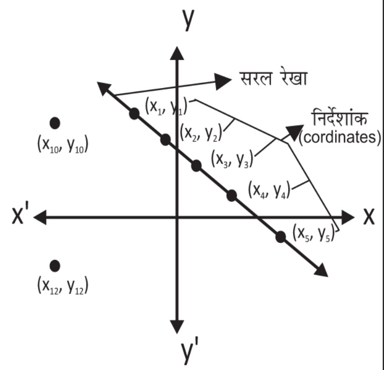
$\Rightarrow 3y = 5 - 2x$

$\therefore y = \frac{5 - 2x}{3}$ .... (1)

अब x का कोई भी मान रखकर संगत y का मान निकालने पर,

x	1	0
y	1	$\frac{5}{3}$

(समीकरण 1 से)



$ax + by + c = 0$

जब $(x, y) = (x_1, y_1), (x_2, y_2)$
$(x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5) ...$

लेकिन,

$ax + by + c \neq 0$

जब $(x, y) = (x_{10}, y_{10}),$
$(x_{12}, y_{12}) ...$

बायां पक्ष	दायां पक्ष
$(x + y)$	5
$\Rightarrow 2 + 3$	
$\Rightarrow 5$	5
$2x + 5y$	19
$\Rightarrow 2 \times 2 + 5 \times 3$	
$\Rightarrow 4 + 15$	
$\Rightarrow 19$	19

ऐसे ही,

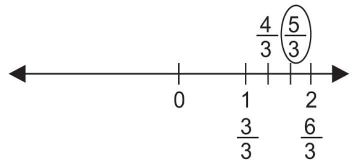
$x + 2y = 8$ एवं

$3x + y = 9$ के लिए भी

निर्देशांक (2, 3) सही उत्तर है।

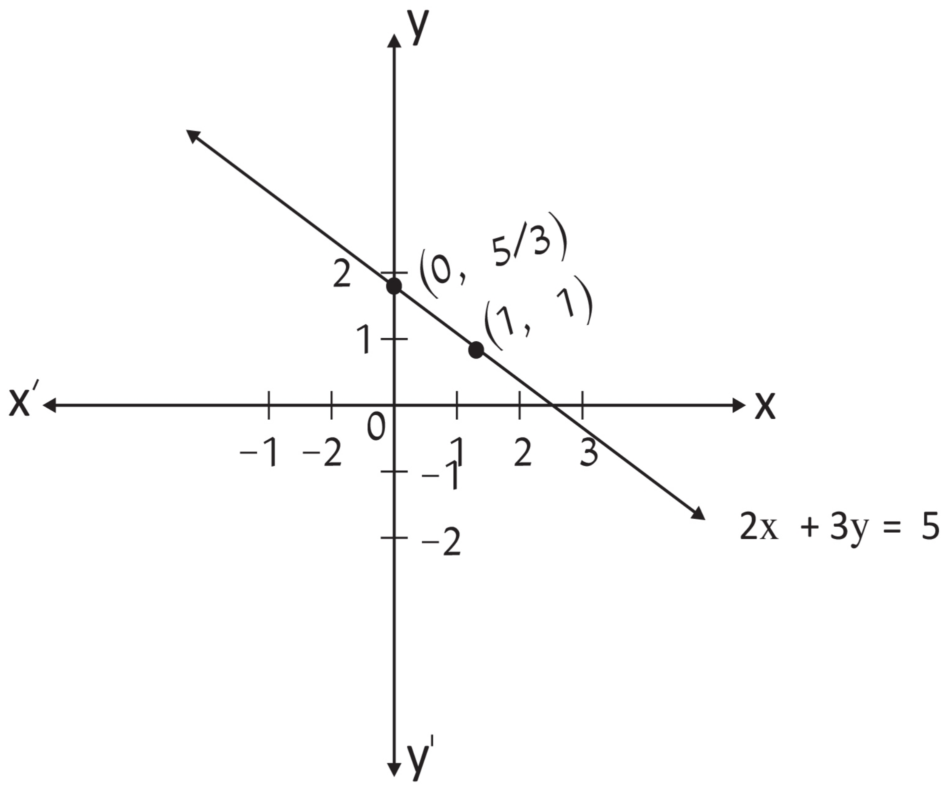
$\frac{5}{3}$ संख्या रेखा पर कहाँ होगा?

$\frac{3}{3} = 1$, $\frac{6}{3} = 2$

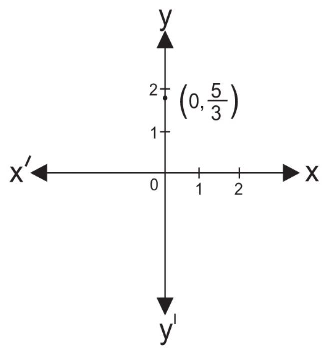


अर्थात (1, 1) एवं $(0, \frac{5}{3})$ समीकरण के दो उत्तर हैं।

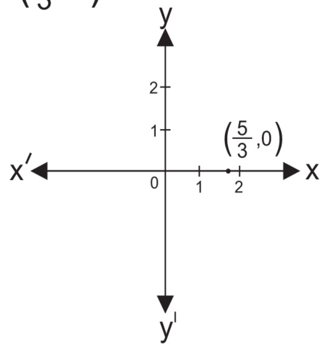
कार्तीय तल पर $2x + 3y = 5$ का ग्राफ़ :



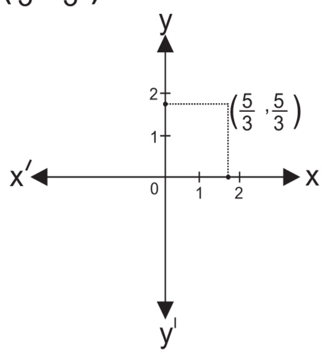
$(0, \frac{5}{3})$ कार्तीय तल पर



$(\frac{5}{3}, 0)$ कार्तीय तल पर



$(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ कार्तीय तल पर



V. निम्न रैखिक समीकरणों के लिए कार्तीय तल पर ग्राफ़ बनाएं।

i) $5x + 2y = 11$ ii) $-9x + 4y = 18$

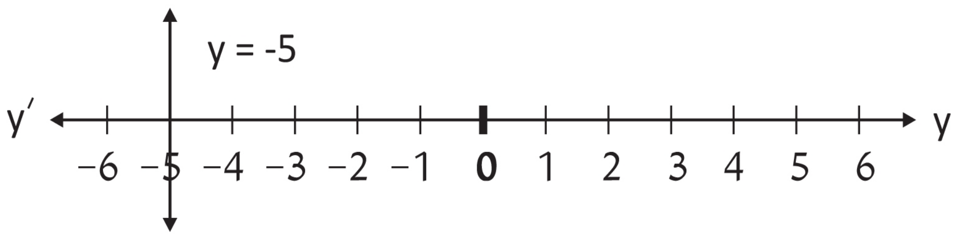
iii) $4x + 7y = 22$ iv) $\frac{y}{4} + 12 = 16$

बेहतर समझ के लिए प्रश्नावली 4.3 का अभ्यास करें। (कक्षा–9, एन.सी.ई.आर.टी.)

दो चर वाले रैखिक समीकरण

उदाहरण 9 :

i) संख्या रेखा पर एक चर वाले समीकरण के रूप में :

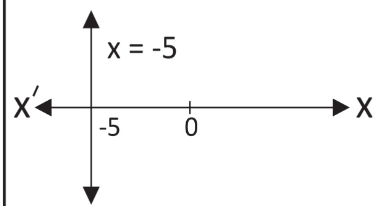


ii) कार्तीय तल पर/दो चर वाले समीकरण के रूप में

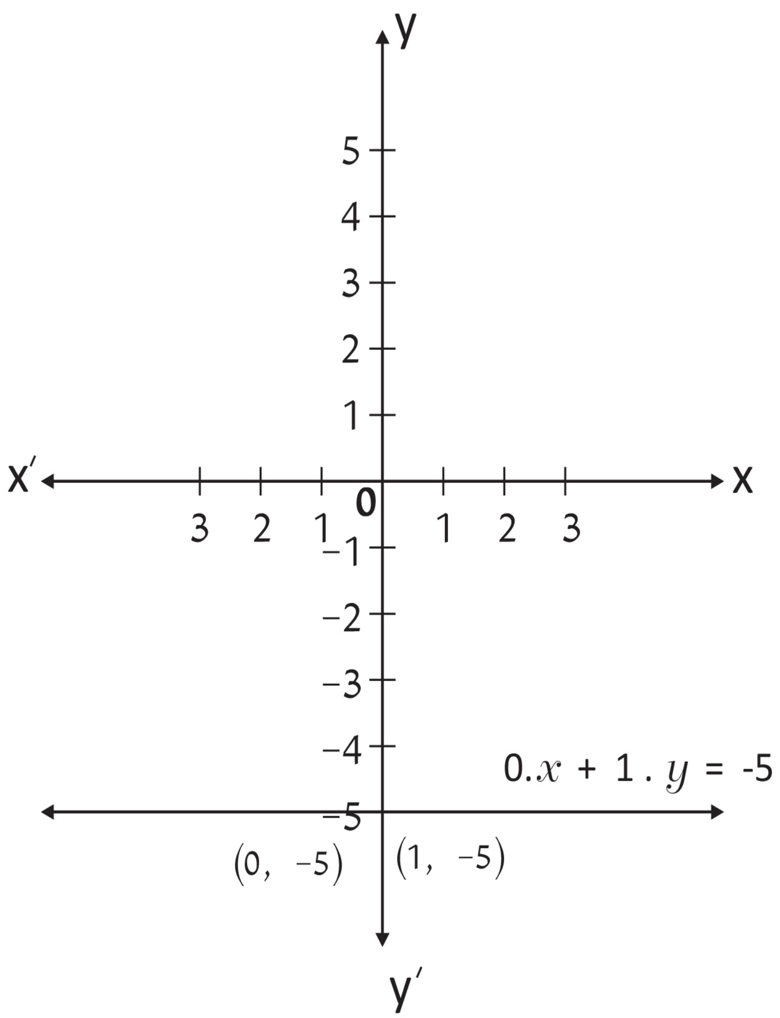
$y = -5$

$0.x + 1.y = -5$

$x = -5$ का ग्राफ एक चर वाले समीकरण के रूप में?



अर्थात, x के किसी भी मान के लिए समीकरण सत्य हो इसलिए निर्देशांक (0, −5) एवं (1, −5) लेते हैं।



कार्तीय तल पर, $x = c$, हमेशा y अक्ष के समान्तर होगा।

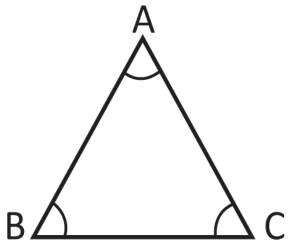
$y = c$, हमेशा x अक्ष के समान्तर होगा।

VI. $3x + 5 = x - 1$ के लिए ग्राफ़ बनाएं।
(i) एक चर वाले समीकरण के रूप में
(ii) दो चर वाले समीकरण के रूप में

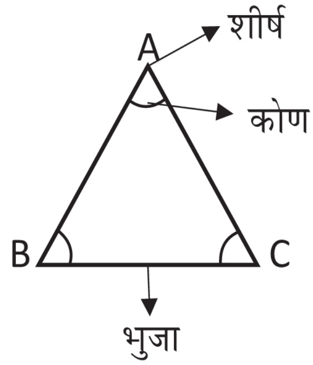
बेहतर समझ के लिए प्रश्नावली 4.4 का अभ्यास करें। (कक्षा–9, एन.सी.ई.आर.टी.)

भाग–1 : त्रिभुज–चतुर्भुज से परिचय, परिमिति–क्षेत्रफल की अवधारणा

त्रिभुज (Triangle) : तीन भुजाओं (sides) से बंद आकृति (shape) त्रिभुज कहलाती है। इसमें तीन भुजाएं, तीन शीर्ष (vertex) एवं तीन कोण (angle) होते हैं। इसके तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

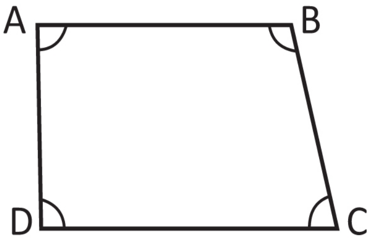


$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

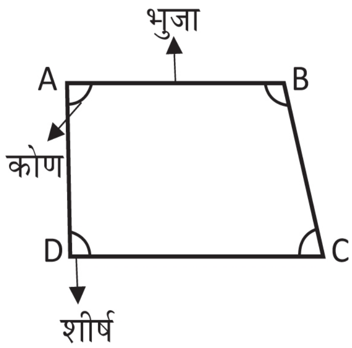


चतुर्भुज (Quadrilateral) : चार भुजाओं से बंद ज्यामितीय (geometric) आकृति चतुर्भुज कहलाती है। इसमें चार भुजाएं, चार शीर्ष एवं चार कोण होते हैं। इसके चारों कोणों का योग 360^0 होता है।

'∠A' को 'कोण A' ऐसा पढ़ते हैं।



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$



उदाहरण 1 :

एक त्रिभुज के तीनों कोणो की माप का अनुपात 2 : 3 : 4 है। कोणों की माप निकालें।

हल: माना त्रिभुज के कोणों की माप x के अनुपात (ratio) में है।

$\therefore$ पहला कोण $= 2x$

दूसरा कोण $= 3x$

तीसरा कोण $= 4x$

हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

$\therefore 2x + 3x + 4x = 180^0$

$\Rightarrow 9x = 180^0$

$\therefore x = \frac{\cancel{180^0}\ 20}{\cancel{9}}$

$= 20^0$

इसलिए त्रिभुज का पहला कोण $= 2x = 2x20^0 = 40^0$

दूसरा कोण $= 3x = 3x20^0 = 60^0$

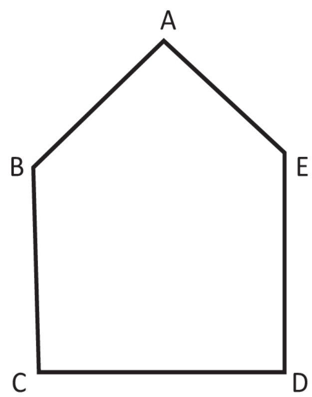
तीसरा कोण $= 4x = 4x20^0 = 80^0$

I. (i) एक चतुर्भुज के कोणों का अनुपात 4:5:3:6 है तो उसके सभी कोणों का मान निकालें।

(ii) एक त्रिभुज के दो कोण बराबर हैं और उनका योग तीसरे कोण के बराबर है तो त्रिभुज के सभी कोण निकालें। यह किस प्रकार का त्रिभुज है, यह भी बताएं?

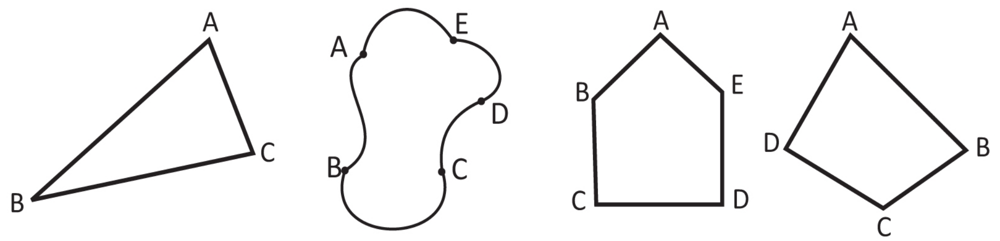
(iii) एक चतुर्भुज के सभी कोण बराबर हैं तो इसके कोण निकालें। ऐसे विशेष चतुर्भुज को और क्या कहते हैं?

पंचभुज



परिमाप (Perimeter) **की अवधारणा** (Concept) **:**

किसी ज्यामितीय आकृति के बाहरी घेरे की लंबाई उसका **परिमाप** कहलाता है। इसे **परिमिति** भी कहते हैं।



(i) (ii) (iii) (iv)

(i) ΔABC का परिमाप $= AB + BC + AC$

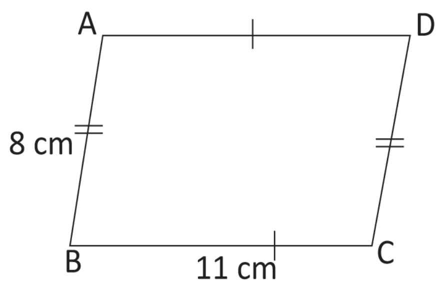
(ii) इस आकृति का परिमाप $= AB + BC + CD + DE + AE$

(iii) पंचभुज ABCDE का परिमाप $= AB + BC + CD + DE + AE$

(iv) चतुर्भुज ABCD का परिमाप $= AB + BC + CD + AD$

उदाहरण 2 : किसी चतुर्भुज के आमने-सामने की भुजाएँ बराबर हैं। अगर असमान भुजाओं की लंबाई 8cm एवं 11cm है तो चतुर्भुज की परिमिति निकालें।

हल:



दिया है कि आमने-सामने की भुजा बराबर है।

$AD = BC = 11\,cm$ एवं

$CD = AB = 8\,cm$

चतुर्भुज की अभीष्ट (required) परिमिति $= AB + BC + CD + AD$

$= (8 + 11 + 8 + 11)\,cm$

$= 38\,cm$

II. (i) समबाहु (equilateral) त्रिभुज की एक भुजा 7 cm है तो इसकी परिमिति निकालें।

(ii) एक चतुर्भुज की परिमिति 120cm है एवं भुजाओं की लम्बाई का अनुपात 2:3:4:5 है। इसकी भुजाएं निकालें।

क्षेत्रफल (Area)

एक बंद आकृति, किसी तल (Plane) का जितना भाग घेरती है, वह उस आकृति का क्षेत्रफल कहलाता है। क्षेत्रफल को हमेशा वर्ग इकाई (square unit) में मापा जाता है।

त्रिभुज का क्षेत्रफल : किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालने की दो विधियाँ हैं-

(i) हीरोन के सूत्र से (Heron's Formula)

(ii) आधार एवं ऊँचाई ज्ञात करके

हीरोन का सूत्र : हीरोन के सूत्र द्वारा हम त्रिभुज का क्षेत्रफल तब निकालते हैं जब हमें त्रिभुज की तीनों भुजाएं ज्ञात हों या वे निकाली जा सकती हों। इसके लिए हमें त्रिभुज की अर्द्ध-परिमिति (आधी परिमिति) या अर्द्ध-परिमाप (Semi perimeter) ज्ञात करनी होती है जिसे s से दर्शाते हैं।

$s = \frac{a+b+c}{2}$, जहाँ a, b एवं c त्रिभुज के तीन भुजाओं की लंबाई है।

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$ हीरोन का सूत्र

उदाहरण 3 : एक त्रिभुज जिसकी तीन भुजाएं क्रमशः 11 मीटर, 18 मीटर एवं 25 मीटर है, उसका क्षेत्रफल निकालें।

हल : a = 11 मीटर, b = 18 मीटर, c = 25 मीटर

$\therefore s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{11+18+25}{2}$ मीटर

$= \frac{54}{2}$ मीटर

= 27 मीटर

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$ (हीरोन का सूत्र)

$= \sqrt{27(27-11)\ (27-18)\ (27-25)}$ वर्गमीटर

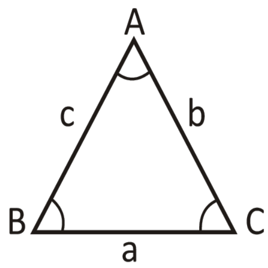
$= \sqrt{27 \times 16 \times 9 \times 2}$ वर्गमीटर

$= \sqrt{9 \times 3 \times 4 \times 4 \times 9 \times 2}$ वर्गमीटर

$= \sqrt{\underline{9 \times 9} \times \underline{4 \times 4} \times 3 \times 2}$ वर्गमीटर

$= 9 \times 4 \sqrt{3 \times 2}$ वर्गमीटर

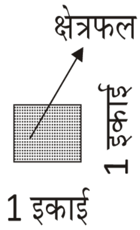
$= 36\sqrt{6}$ वर्ग मीटर



s = त्रिभुज की अर्द्ध-परिमिति

$= \frac{BC + AC + AB}{2}$

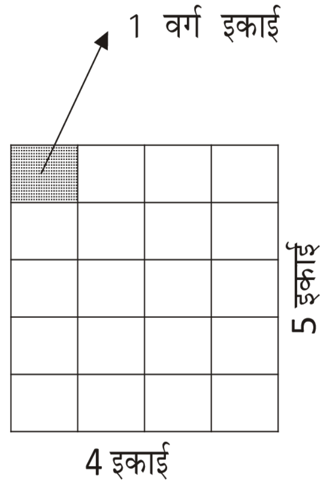
$= \frac{a+b+c}{2}$



इस आकृति का क्षेत्रफल

= (1x1) वर्ग इकाई

= 1 वर्ग इकाई



इस आकृति का क्षेत्रफल

= 1 वर्ग इकाई वाले कुल वर्गों का क्षेत्रफल

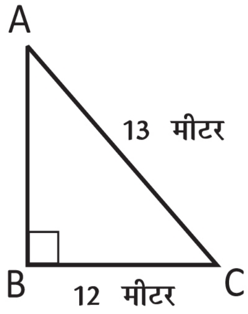
= 5 x 4 वर्ग इकाई

= 20 वर्ग इकाई

(क्योंकि दी हुई आकृति में 5 पंक्तियाँ हैं और प्रत्येक पंक्ति में 1 वर्ग इकाई वाले 4 वर्ग हैं।)

उदाहरण 4 : एक समकोण त्रिभुज के कर्ण और आधार की लंबाई क्रमशः 13 मीटर और 12 मीटर है। इसका क्षेत्रफल हीरोन सूत्र की मदद से निकालें।

हल :



प्रश्न के अनुसार, कर्ण = 13 मीटर एवं आधार = 12 मीटर

हम जानते हैं कि, $\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$ (समकोण त्रिभुज का गुण)

$\Rightarrow (13)^2 = \text{लम्ब}^2 + (12)^2$

$\text{लम्ब} = \sqrt{(13)^2 - 12^2}$ मीटर

$= \sqrt{169 - 144}$ मीटर

$= \sqrt{25}$ मीटर

$= 5$ मीटर

इस त्रिभुज की अर्द्धपरिमिति, $s = \frac{5+12+13}{2}$ मीटर $s = \frac{30}{2}$ मीटर $= 15$ मीटर

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)}$ वर्गमीटर

$= \sqrt{15 \times 10 \times 3 \times 2}$ वर्गमीटर

$= \sqrt{5 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 2}$ वर्गमीटर

$= \sqrt{\underline{5 \times 5} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{2 \times 2}}$ वर्गमीटर

$= 5 \times 3 \times 2$ वर्गमीटर या $5 \times 3 \times 2\ m^2$

$= 30$ वर्गमीटर या $30 m^2$

III. निम्न त्रिभुजों के क्षेत्रफल निकालें जिनकी भुजाओं की लंबाई नीचे बताई गई है–

(i) (8, 6, 12) मीटर (ii) (3, 8, 7) मीटर

(iii) (2, 12, 11) मीटर (iv) (14, 5, 13) मीटर

IV. निम्न समकोण त्रिभुजों का क्षेत्रफल निकालें जिनके कर्ण और एक भुजा की लंबाई नीचे बताई गई है–

(i) कर्ण = 5 सेंटीमीटर, भुजा = 3 सेंटीमीटर

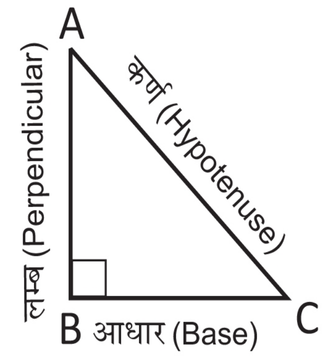
(ii) कर्ण = 13 मीटर, भुजा = 8 मीटर

आधार एवं ऊँचाई के आधार पर त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालें।

(त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई)

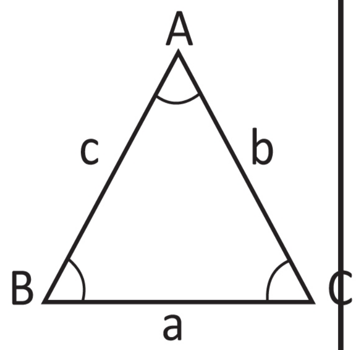
पाइथागोरस प्रमेयः

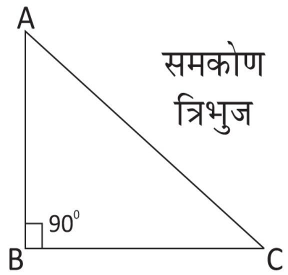
(केवल समकोण (90^0) त्रिभुज में लागू)



$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

$\text{कर्ण} = \sqrt{\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2}$





क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई $= \frac{1}{2}$ BC x AB

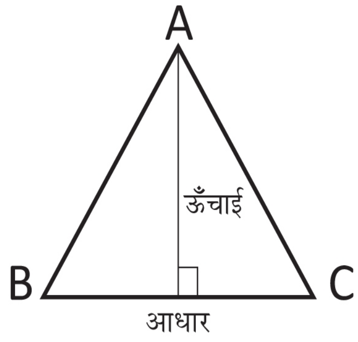
उदाहरण 5 : किसी त्रिभुज का आधार 14 मीटर और ऊँचाई 20 मीटर है तो उसका क्षेत्रफल निकालें।

हल : त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

$= \frac{1}{\cancel{2}}$ x 14 मीटर x $\cancel{20}^{10}$ मीटर

= 140 वर्गमीटर या $140m^2$

अत: त्रिभुज का अभीष्ट (जो चाहिए वो, required) क्षेत्रफल = 140 वर्गमीटर



उदाहरण 6 : किसी त्रिभुज के आधार की लंबाई 8 मीटर और उसका क्षेत्रफल 40 वर्गमीटर है तो उसकी ऊँचाई ज्ञात करें।

हल : त्रिभुज के आधार की लंबाई = 8 मीटर

एवं त्रिभुज का क्षेत्रफल = 40 वर्गमीटर

ऊँचाई = ?

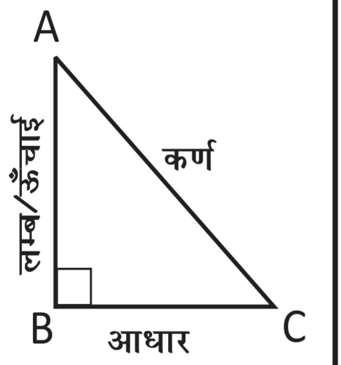
हम जानते हैं कि

$\frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई = त्रिभुज का क्षेत्रफल

$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}$ x $\cancel{8}^{4}$ x ऊँचाई = 40 वर्गमीटर

$\therefore$ ऊँचाई $= \dfrac{\cancel{40}^{10} \text{ मीटर x } \cancel{\text{मीटर}}}{\cancel{4 \text{ मीटर}}}$ = 10 मीटर

अत: त्रिभुज की अभीष्ट (required) ऊँचाई = 10 मीटर

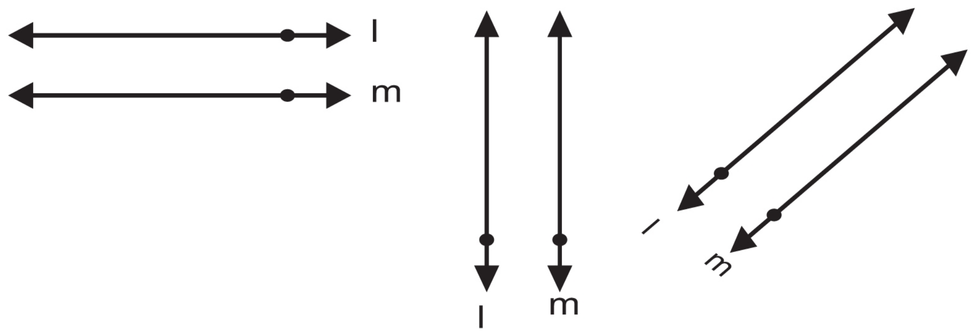


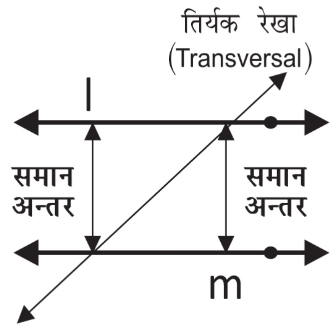
V. नीचे दी गई सूचानाओं के आधार पर निम्न सवालों को हल करें। त्रिभुज का :-

(i) आधार = 15 मीटर, ऊँचाई = 8 मीटर, क्षेत्रफल = ?

(ii) ऊँचाई = 12 मीटर, क्षेत्रफल = 33 वर्गमीटर, आधार = ?

समांतर रेखाएं (Parallel lines) : दो रेखाएं आपस में समांतर होती हैं जब उनके बीच की दूरी हमेशा सामान होती है, अर्थात् वास्तविकता में ये रेखाएँ कहीं नहीं मिलती हैं।



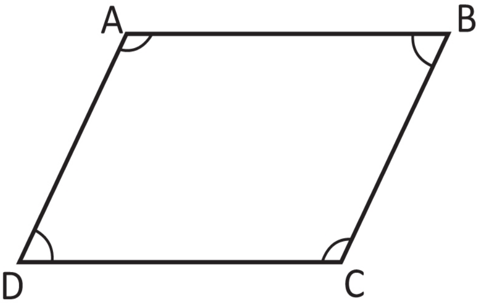


समान अन्तर

→ समानान्तर

यहाँ l||m (इसे पढ़ते हैं - l समांतर हैं m के)

समांतर चतुर्भुज (Parallelogram): वैसे चतुर्भुज जिनके आमने-सामने की भुजाएँ समांतर हो, समांतर चतुर्भुज कहलाते हैं।

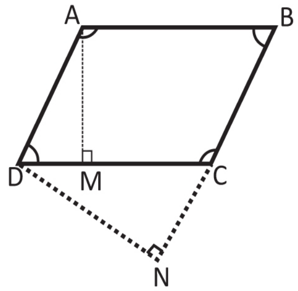


समांतर चतुर्भुज के आमने-सामने की (सम्मुख) भुजाएं बराबर होती हैं और सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं। विपरीत शीर्षो को जोड़ने वाला रेखाखण्ड विकर्ण (Diagonal) कहलाता है।

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

उदाहरण 7 : किसी समांतर चतुर्भुज का आधार 30cm और उसकी ऊँचाई 12cm है, इसका क्षेत्रफल निकालें।



AM⊥CD (AM लम्ब है CD पर)

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= CD x AM

= $(30 \times 12)\, cm^2$

= $360\, cm^2$

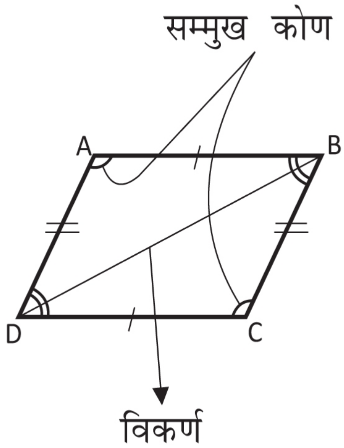
VI. नीचे दी गई सूचनाओं (Informations) के आधार पर निम्न सवालों को हल करें।

समान्तर चतुर्भुज ABCD की -

(i) एक भुजा = 8cm, क्षेत्रफल = $96cm^2$ ऊँचाई = ?

(ii) भुजा AB = 18cm, BC = 10cm, DN = 5cm, DN⊥BC, क्षेत्रफल = ?

(iii) BC = 12m, AM = 5m, DN = 6m, AM⊥DC, DN⊥BC, क्षेत्रफल = $72\, m^2$ भुजा AB = ?



समांतर चतुर्भुज ABCD में,

सम्मुख कोण → आमने-सामने के कोण

सम्मुख भुजाएं → आमने-सामने की भुजाएं

समांतर

AB = CD, AB II CD

AD = BC, AD II BC

<A = < C } सम्मुख कोण

<B = <D

भाग–2 : सर्वांगसमता और वृत्त से परिचय एवं प्रमेयों को सिद्ध करना

त्रिभुज की सर्वांगसमता (Congruence) : दो त्रिभुज आपस में सर्वांगसम होंगे जब निम्न में से कोई भी संबंध होता हो–

(i) SSS (भुजा–भुजा–भुजा) : दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएं बराबर हों तो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

(ii) SAS (भुजा–कोण–भुजा) : दोनों त्रिभुजों की दो संगत भुजाएं और उनके बीच का एक कोण बराबर हो।

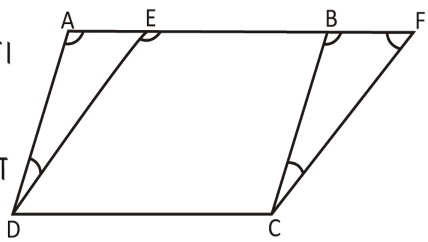
(iii) ASA (कोण–भुजा–कोण) : दोनों त्रिभुजों के दो संगत कोण एवं उनके बीच की एक भुजा बराबर हो।

(iv) RHS (समकोण कर्ण–भुजा) : एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और कोई एक ओर भुजा क्रमशः दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो।

सर्वांगसम होने की स्थिति में त्रिभुज की सभी भुजाएं एवं कोण और इसके फलस्वरूप उनके परिमाप एवं क्षेत्रफल भी बराबर होंगे।

प्रमेय : एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

उपपत्ति : दो समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD दिए हुए हैं, जो एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं AF और DC के बीच स्थित हैं। (चित्र में देखें)



हमें arΔABCD) = arΔEFCD) सिद्ध करना है।

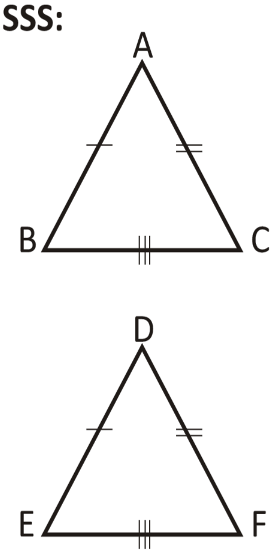
ΔADE और ΔBCF में,

$\angle$DAE = $\angle$CBF, AD II BC और तिर्यक रेखा (Transversal) AF से संगत कोण)——①

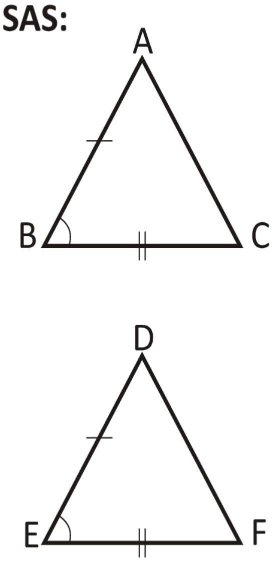
$\angle$AED = $\angle$BFC (ED II FC और तिर्यक रेखा AF से संगत कोण)——②

सर्वांगसमता
↓
सर्व अंग समता
↓
सभी अंग समान
↓
सभी भुजाएँ समान
↓
सभी कोण समान
↓
क्षेत्रफल एवं परिमिति भी समान

SSS:



SAS:



इसलिए, शेष $\angle ADE = \angle BCF$ (त्रिभुज का कोण योग गुण) ——③

साथ ही, $AD = BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)——④

अत: $\Delta ADE \cong \Delta BCD$ {ASA नियम तथा (1), (3) और (4) द्वारा}

इसलिए, $ar\Delta ADE) = ar\Delta BCF)$ (सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं)——⑤

अब, $ar\Delta ABCD) = ar\Delta ADE) + ar\Delta EDCB)$

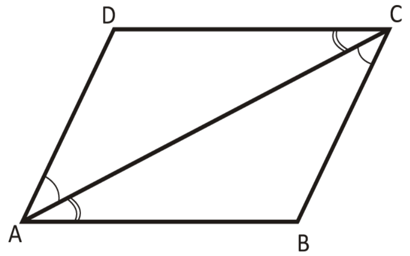
$= ar\Delta BCF) + ar\Delta EDCB)$, [(5) से]

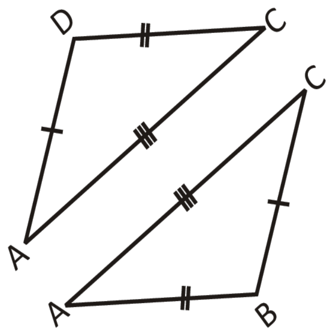
$= ar(EFCD)$

अत:, समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD क्षेत्रफल में बराबर हैं।

प्रमेय : किसी समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

उपपत्ति : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और AC उसका एक विकर्ण है (चित्र देखिए)। देखिए कि विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है। हमें सिद्ध करना है कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।





ΔABC और ΔCDA के लिए ध्यान दीजिए कि $BC \parallel AD$ है और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए, $\angle BCA = \angle DAC$ (एकांतर कोणों का युग्म)

साथ ही, $AB \parallel DC$ और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए, $\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर कोणों का युग्म)

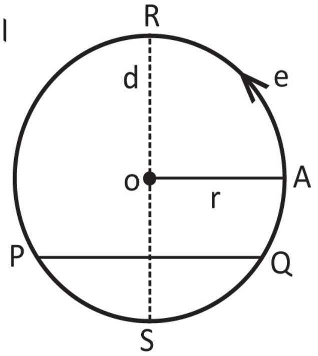
और $AC = CA$ (उभयनिष्ठ)

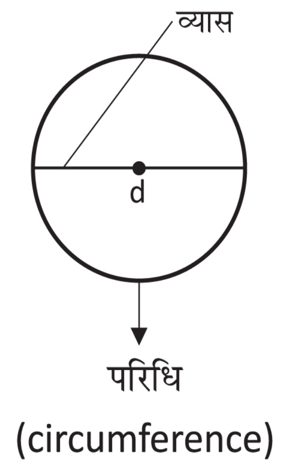
अत: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA नियम)

अर्थात् विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो सर्वांगसम त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है।

वृत्त (circle) एवं उसका परिवार

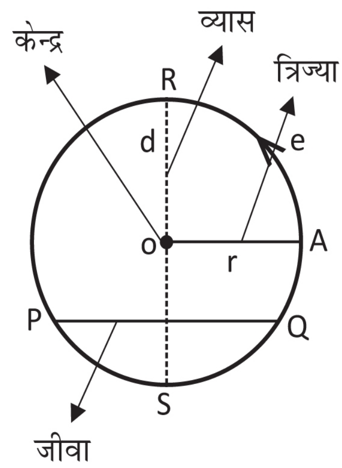
किसी तल (plane) पर, एक बिन्दु से समान दूरी वाली सभी बिन्दुओं को मिलाने पर जो गोलाकार आकृति बनती हैं, उसे **वृत्त (circle)** कहते हैं। वृत्त के सभी बिन्दुओं से समान दूरी वाला यह बिन्दु वृत्त का **केन्द्र** (centre) कहलाता है। एक वृत्तद के केन्द्र पर 360^0 का कोण होता है।





- **त्रिज्या (Radius) :** चित्र में o केन्द्र (Center) है। केन्द्र से वृत्त की दूरी उसकी त्रिज्या कहलाती है जिसे (r) से दर्शाते हैं। इसे 'अर्द्धव्यास' भी कहते हैं।
- **जीवा (Chord) :** वृत्त के एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त की जीवा कहलाती है। चित्र में PQ वृत्त की जीवा को दर्शाता है।
- **व्यास (Diameter) :** जो जीवा वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरती है, वह वृत्त का व्यास कहलाती है। व्यास वृत्त की सबसे लम्बी जीवा होती है। चित्र में RS वृत्त का व्यास है। व्यास की लंबाई, त्रिज्या की लंबाई की दोगुनी होती है।
- **परिधि (Circumference) :** वृत्त की लंबाई उसकी परिधि कहलाती है। उसे c से दर्शाते हैं। यदि वृत्त की त्रिज्या ज्ञात हो तो इसकी परिधि निकाली जा सकती है।

$c = 2\pi r$, जहाँ π (पाई) एक अचर होता है और इसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 होता है।

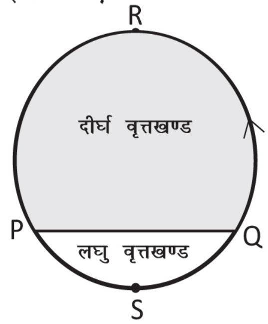


$d = 2r$

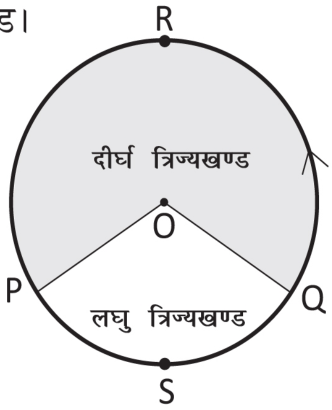
व्यास = 2x त्रिज्या

$\pi = \frac{22}{7} = 3.14$

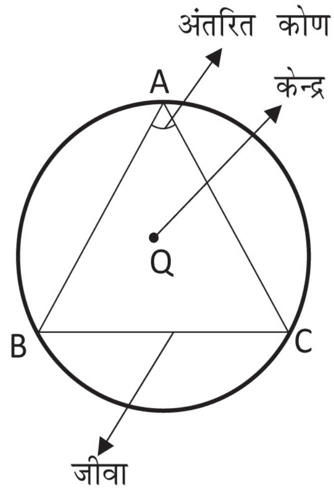
- **चाप** (Arc) **:** दो बिन्दुओं के बीच वृत्त का एक टुकड़ा वृत्त की चाप कहलाता है। कोई भी जीवा वृत्त को दो चापों में बाँटती है। साधारणत: इसमें एक लघु (छोटा) और एक दीर्घ (बड़ा) चाप होता है। वृत्त का व्यास वृत्त को दो बराबर हिस्सों में बाँटता है। चित्र में $\overset{\frown}{PSQ}$ लघु चाप है, जबकि $\overset{\frown}{PRQ}$ दीर्घ चाप है।
- **वृत्तखंड** (Segment) **:** वृत्त की एक जीवा और इसके एक ओर के चाप को मिलाकर वृत्तखण्ड बनता है। चाप के आधार पर ही जीवा, वृत्त को एक लघु वृत्तखण्ड और एक दीर्घ वृत्तखण्ड में बाँटता है।

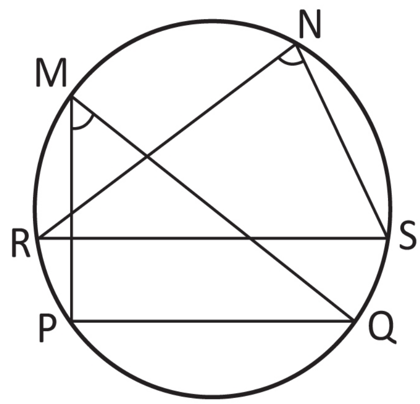


• **त्रिज्यखण्ड** (Sector) **:** वृत्त की चाप और दो त्रिज्याओं के किसी एक ओर का भाग त्रिज्यखंड बनाता है। वृत्तखण्ड की ही तरह त्रिज्यखण्ड के भी दो प्रकार हैं, लघु त्रिज्यखण्ड एवं दीर्घ त्रिज्यखण्ड।



• **अंतरित कोण** (Subtended Angle) **:** वृत्त की जीवा के अंत बिन्दु को वृत के किसी ओर बिन्दु से मिलाने पर जो कोण बनता है, उसे वृत्त का अंतरित कोण कहते हैं।





चित्र में, ∠PMQ और ∠RNS वृत्त की क्रमशः जीवा PQ और RS द्वारा वृत्त पर अंतरित कोण हैं।

प्रमेय : वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

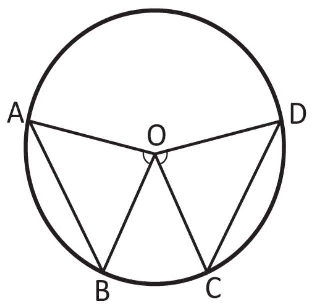
उपपत्तिः आपको एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, कि दो बराबर जीवाएँ AB और CD दी हुई हैं (देखिए चित्र) तथा आप सिद्ध करना चाहते हैं कि ∠AOB = ∠COD है।

त्रिभुजों AOB तथा COD में,

OA = OC (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

OB = OD (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

AB = CD (दिया है)



अतः ΔAOB ≅ ΔCOD (SSS नियम)

इस प्रकार हम पाते हैं कि ∠AOB = ∠COD (सर्वंगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

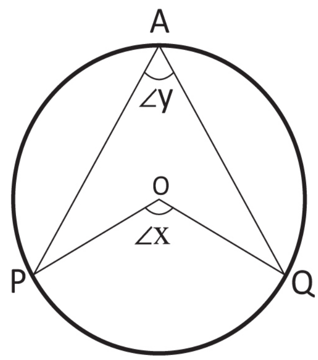
प्रमेय : यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।

उपर्युक्त प्रमेय, प्रमेय 10.1 का विलोम है। ध्यान दीजिए कि चित्र में यदि आप $\angle AOB = \angle COD$ लें, तो

$$\Delta AOB \cong \Delta COD \text{ (क्यों?)}$$

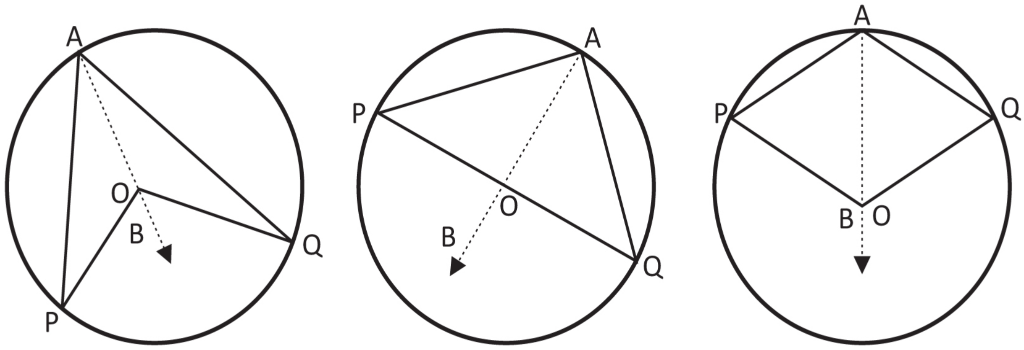
क्या अब आप देख सकते हैं कि $AB = CD$ है?

प्रमेय : एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।



$\angle x = 2x\angle y$

उपपत्ति : एक वृत्त की चाप PQ दिया है, जो केन्द्र O पर $\angle POQ$ तथा वृत्त के शेष भाग के एक बिन्दु A पर $\angle PAQ$ अंतरित करता है। हमें सिद्ध करना है कि $\angle POQ = 2\angle PAQ$ है।



(i) (ii) (iii)

आकृति में दी गई तीन विभिन्न स्थितियों पर विचार कीजिए।

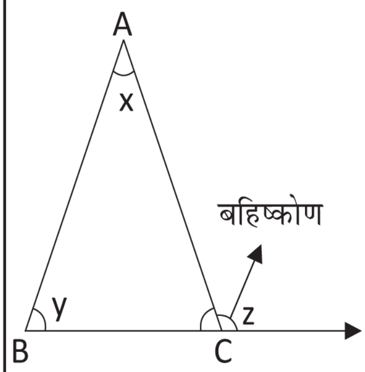
(i) में चाप PQ लघु है, (ii) में चाप PQ अर्धवृत्त है तथा (iii) में चाप PQ दीर्घ है।

आइए हम AO को मिलाकर एक बिन्दु B तक बढ़ाएँ।

सभी स्थितियों में,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

(क्योंकि त्रिभुज का बहिष्कोण उसके दो अभिमुख अंत: कोणों के योग के बराबर होता है।)



$\angle z = \angle x + \angle y$

साथ ही ΔOAQ में,

$OA = OQ$ (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OAQ = \angle AQO$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

अत:

इससे प्राप्त होता है: $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ —— (1)

इसी प्रकार, $\angle BOP = 2\angle OAP$ —— (2)

(1) और (2) से, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

अर्थात् $\angle POQ = 2\angle PAQ$ —— (3)

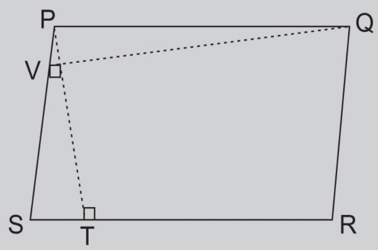
स्थिति (iii) के लिए, जहाँ PQ दीर्घ चाप है, (3) के स्थान पर

प्रतिवर्ती कोण (Reflex Angle) $POQ = \angle PAQ$ होगा।

(प्रमेय 10.8, एन.सी.ई.आर.टी., कक्षा–9, पेज़–216–217 से लिया गया है।)

VII. विविध (Miscellaneous) प्रश्न अभ्यास के लिए:

1.

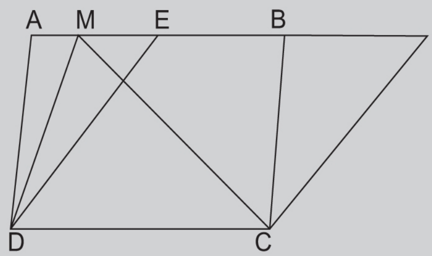


समांतर चतुर्भुज PQRS में

$PT \perp RS$ एवं $QV \perp PS$

RS = 12cm, PV = 13cm,
SV = 6cm, QR = ?

2.



दिया है, ABCD एवं DEFC समांतर चतुर्भुज है एवं DMC एक त्रिभुज है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

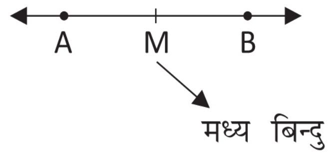
सिद्ध करें : (i) ar (▱ABCD) = ar (DEFC)

(ii) ar (ΔDMC) = $\frac{1}{2}$ (▱DEFC)

नोट : बेहतर समझ के लिए प्रश्नावली 9.2 एवं 9.3 का अभ्यास करें। (कक्षा 9, एन.सी.आर.टी.)

भाग–3 : रचनायें (Constructions)

उदाहरण 8 : 8cm लम्बाई का एक रेखाखण्ड खींचें और उसको समद्विभाजित करें। (समद्विभाजित – दो समान भागों में बांटना)



$AM = BM = \frac{AB}{2}$

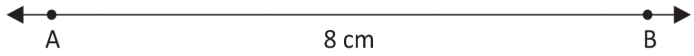
समद्विभाजित

दो बराबर भागों में बांटना

पहला चरण:

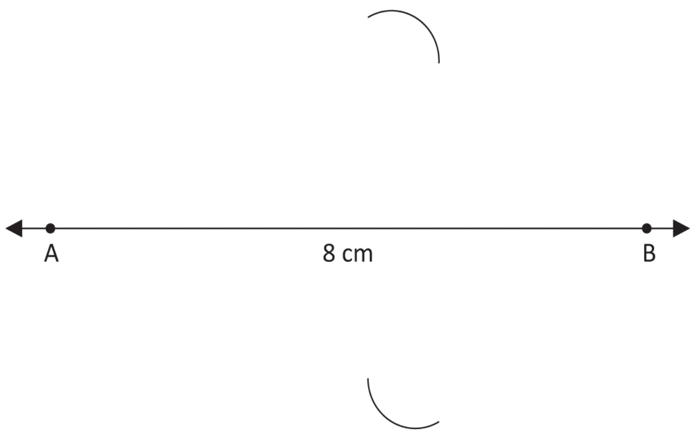
रूलर (स्केल) की सहायता से एक सरल रेखा खींचते हैं।

कंपास और पेंसिल की सहायता से 8cm का रेखाखण्ड काट लेते हैं। रेखाखण्ड के अंत बिन्दुओं को A एवं B नाम देते हैं।



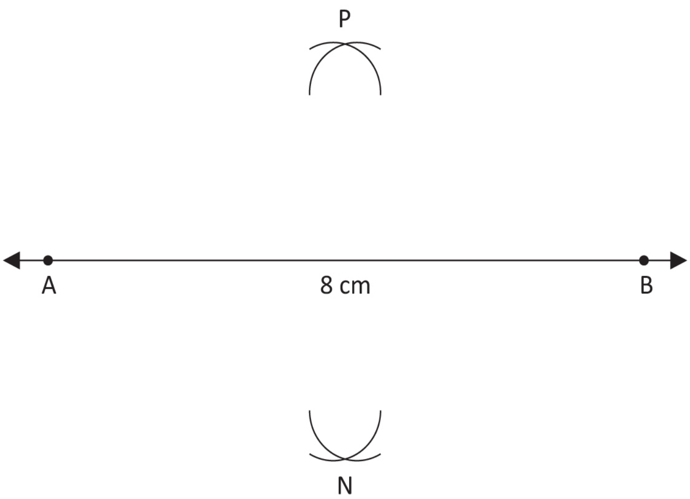
दूसरा चरण:

कंपास और पेंसिल की सहायता से बिन्दु A से आधे से ज़्यादा दूरी पर रेखाखण्ड AB की दोनों ओर एक-एक चाप लगाते हैं।



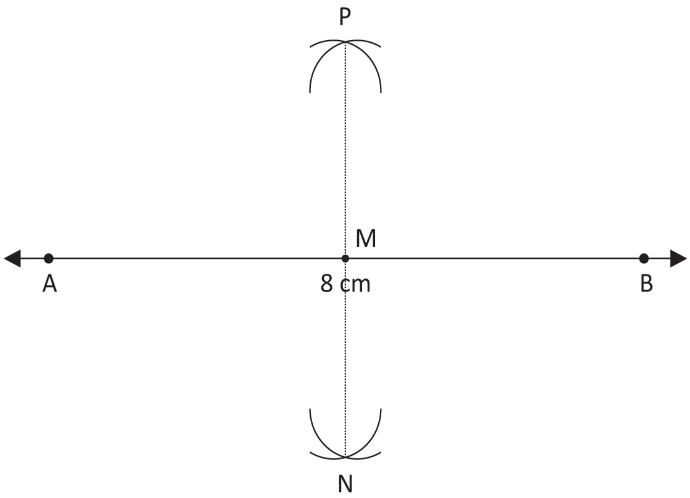
तीसरा चरण:

कंपास की माप बदले बिना बिन्दु B से भी AB के दोनों ओर चाप खींचते हैं जो पहले के चाप को P एवं N बिन्दु पर मिलते हैं।



चौथा चरण:

रूलर (स्केल) और पेंसिल की सहायता से बिन्दु P एवं N को मिलाते हैं जो AB को M पर मिलता है।



M, AB का मध्य बिन्दु है।

$AM = BM = \frac{AB}{2} = \frac{8cm}{2} = 4\,cm$ होगा।

पांचवा चरण:

PM हमारा अभीष्ट समद्विभाजक (Bisector) है। अपनी रचना की शुद्धता की जांच करते हैं।

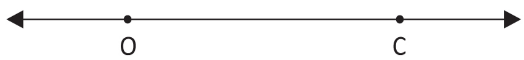
VIII. **नीचे कुछ रेखाखण्ड की लम्बाई दी गई हैं, इनके समद्विभाजक खीचें।**

(i) 12.6cm (ii) 15 cm (iii) 20 cm (iv) 8 cm

उदाहरण 9 : 30^0 के कोण की रचना करें।

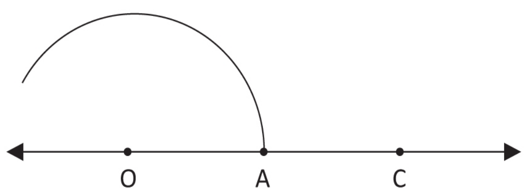
पहला चरण:

एक सरल रेखा खींचते हैं और उस पर किसी भी माप का OC रेखाखण्ड काट लेते हैं।



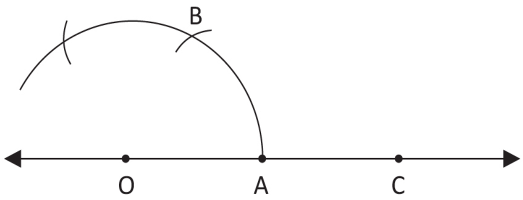
दूसरा चरण:

बिन्दु O से कंपास एवं पेंसिल की सहायता से एक चाप लेते हैं जो रेखाखण्ड OC को बिन्दु A पर मिलता है।



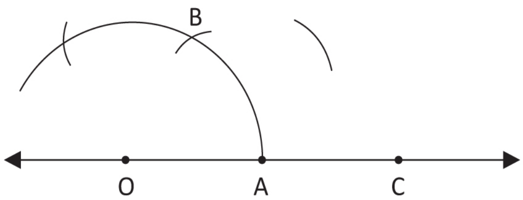
तीसरा चरण :

कंपास की माप बदले बिना, बिन्दु A से चाप पर कुछ काट लगाते हैं। हर कटान 60^0 के अंतराल पर होता है। पहले कटान को बिन्दु B नाम देते हैं।



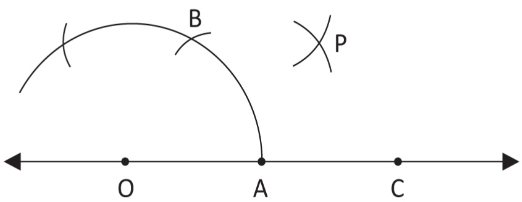
चौथा चरण :

बिन्दु A पर कंपास रखते हुए AB लम्बाई वाले चाप की आधी से ज़्यादा लम्बाई का एक कटान लगाते हैं।



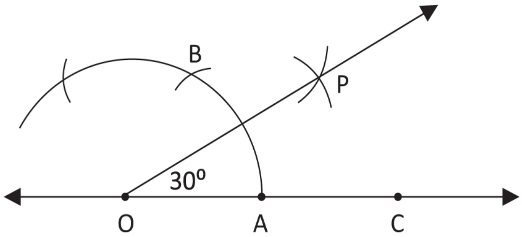
पांचवा चरण :

कंपास की माप बदले बिना अब बिन्दु B से भी एक चाप लगाते हैं जो पहले वाले कटान को बिन्दु P पर काटता है।



छठा चरण :

बिन्दु P को O से मिलाते हैं।



∠POC अभीष्ट कोण 30^0 है।

सातवां चरण :

प्रोटेक्टर (कोणमापक) की सहायता से रचना की शुद्धता की जांच करते हैं।

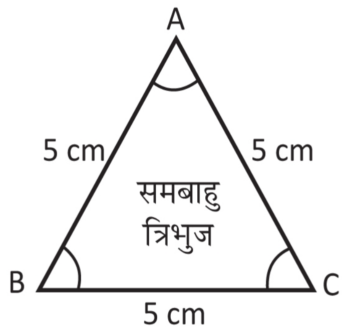
IX. नीचे दिए गए मापों की रचना करें एवं रचना के चरण भी लिखें।

(i) 60^o (ii) 45^o (iii) 90^o (iv) 75^o (v) 120^o (vi) 150^o

उदाहरण 10 : 5 सेमी. भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज (Equilateral) की रचना करें।

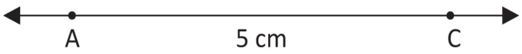
हलः

हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।



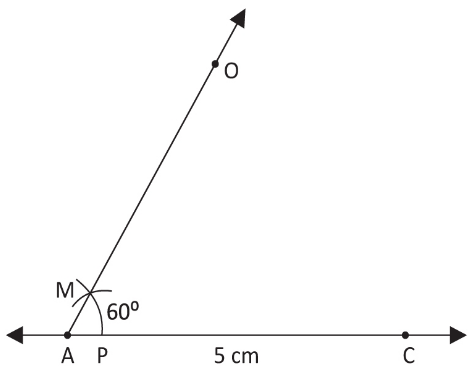
पहला चरणः

5cm लम्बाई वाला एक रेखाखण्ड AC खींचते हैं।



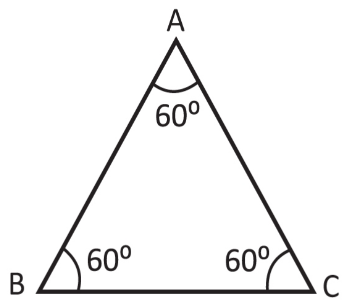
दूसरा चरणः

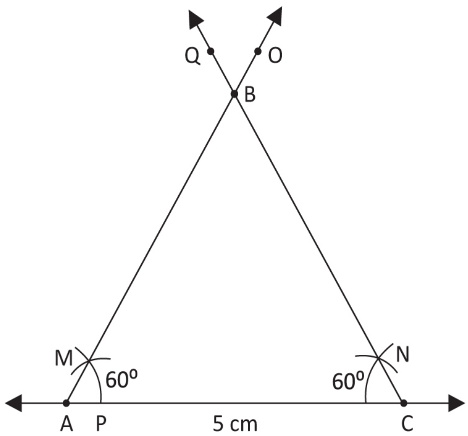
बिन्दु A पर 60^0 का कोण बनाते हुए एक किरण OA की रचना करते हैं जिससे $\angle OAC = 60^0$



तीसरा चरणः

अब बिन्दु C पर 60^0 का कोण बनाते हुए एक किरण QC की रचना करते हैं, जिससे $\angle QCR = 60^0$ एवं जो किरण OA को बिन्दु B पर काटता है।





ABC हमारा अभीष्ट समबाहु त्रिभुज है।

समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण

$= \frac{180^0}{3}$ 60^0

$= 60^0$

चौथा चरणः

भुजा AB, AC एवं BC मापकर अपनी रचना की शुद्धता की जांच करते हैं। समबाहु त्रिभुज की हर भुजा बराबर और हर कोण 60^0 के होने चाहिए।

X. (i) किसी भी माप के एक समबाहु त्रिभुज की रचना करें।
(ii) 7.5 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज की रचना करें।

नोट – बेहतर समझ के लिए प्रश्नावली 11.1 का अभ्यास करें।
(कक्षा 9, एन.सी.आर.टी.)

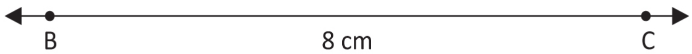
उदाहरण 11 : एक त्रिभुज की रचना करें जिसका आधार 8 सेमी. आधार पर बना एक कोण 30^0 एवं अन्य दो भुजाओं की लम्बाईयों का अंतर 3 सेमी. है।

हलः यहाँ दो अलग-अलग परिस्थितियाँ हो सकती हैं। अगर अभीष्ट ΔABC है जिसका $BC = 8cm$ एवं $\angle B = 30^0$ दिया है तो –

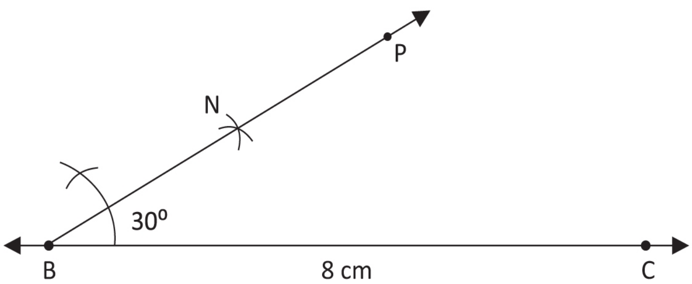
(i) $AB - AC = 3cm$
(ii) $AC - AB = 3cm$

परिस्थिति (i):

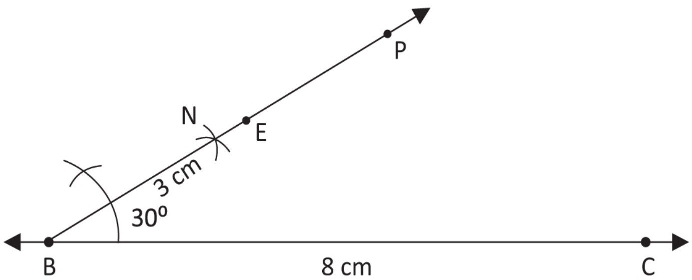
पहला चरणः
रेखाखण्ड $BC = 8\,cm$ खींचते हैं।



दूसरा चरणः
बिन्दु B पर 30^0 का कोण बनाते हुए किरण PB की रचना करते हैं।

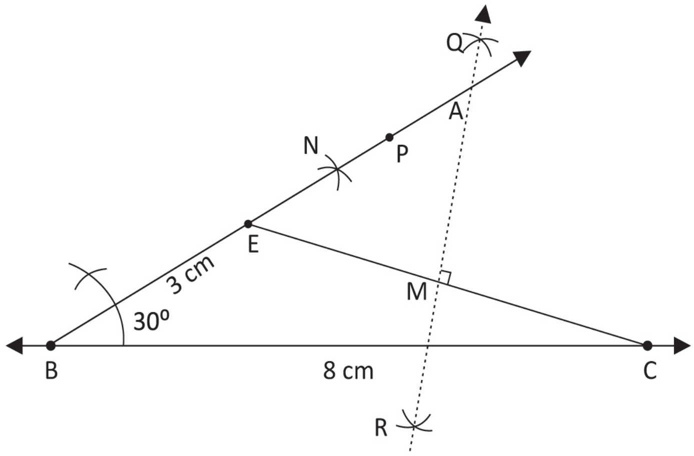


तीसरा चरणः
किरण PB पर $BE = AB - AC = 3cm$ काटते हैं जो PB को बिन्दु E पर मिलती है।



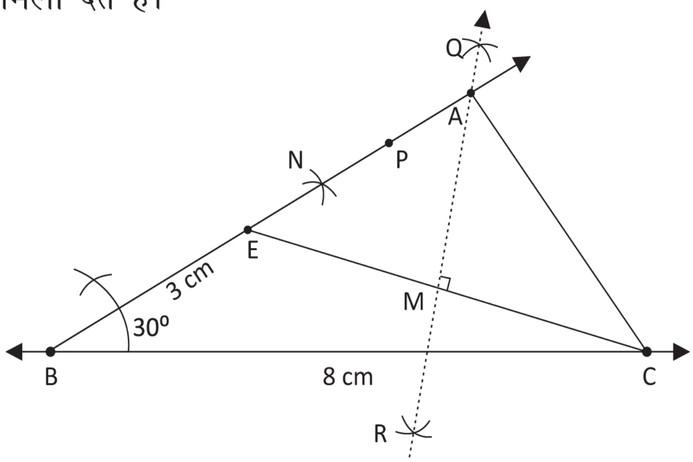
चौथा चरण:

बिन्दु E एवं C को मिला देते हैं और उसका लम्ब समद्विभाजक (Peopendicular Bisector) QR खींचते हैं जो किरण PB को A पर मिलता है।



पांचवा चरण :

A-C को मिला देते हैं।



ΔABC हमारा अभीष्ट त्रिभुज है।

परिस्थिति (ii) :

लम्ब – समद्विभाजक

↓

लम्ब + समद्विभाजक

↓

90^0 का भी हो एवं दो समान भागों में बांटता हो।

ΔAEC में,

ΔAEM ≅ Δ ACM

(भुजा कोण भुजा से)

AE = AC

अब, BE = AB – AE —①

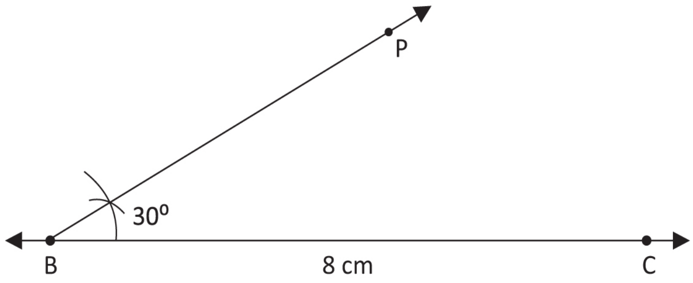
या, BE = AB – AC

(समीकरण 1 से)

= 3 cm (रचना से)

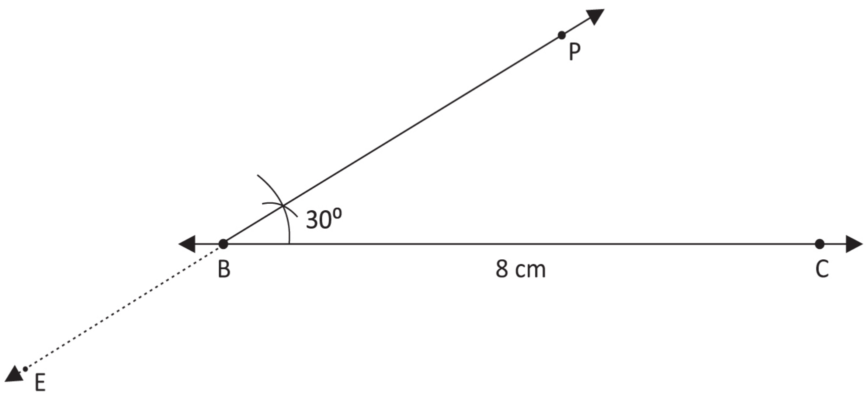
पहला चरण :

BC = 8 cm एवं $\angle B = 30^0$ की रचना करते हैं।



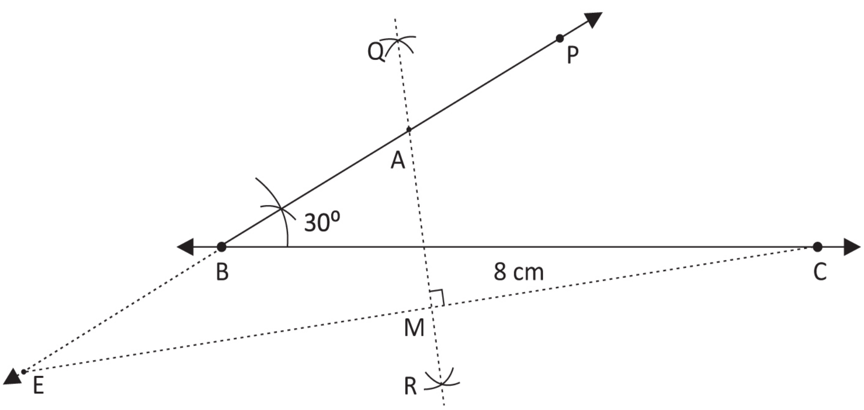
दूसरा चरण :

किरण BP को विपरीत ओर बढ़ाते हैं और उसमें BE = AC − AB = 3cm काट लेते हैं जो BP के बढ़े हुए भाग को E पर मिलता है।



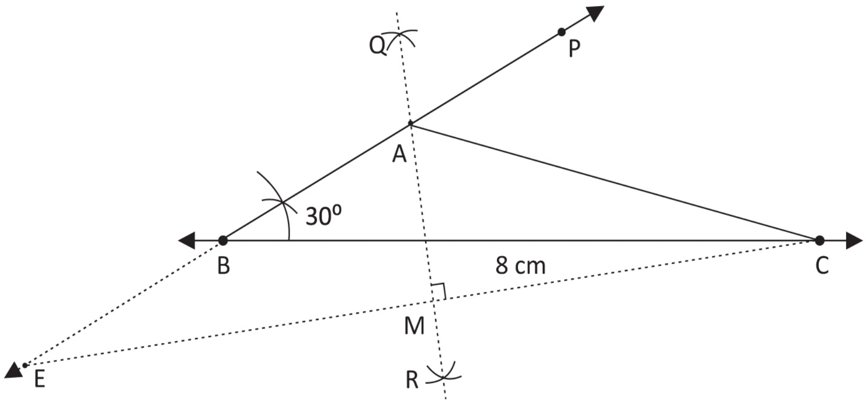
तीसरा चरण :

C-E को मिला देते हैं और उसका एक लम्ब समद्विभाजक QR खींचते हैं जो BP को A पर मिलता है।



चौथा चरण :

A-C को मिला देते हैं।



ΔABC हमारा अभीष्ट त्रिभुज होगा।

Δ ACE में,

AC = AE (Δ AME $\cong$ Δ AMC) ——— (1)

(भुजा-कोण-भुजा से)

अब,

BE = AE – AB

= AC – AB

(समीकरण 1 से)

= 5 cm (रचना से)

XI. **ΔABC की रचना करें, जिसमें :**

(i) $AB = 5\text{ cm}, \angle A = 30^0, AC + BC = 20\text{ cm}$

(ii) $AC = 8\text{ cm}, \angle c = 45^0, BC - AB = 3\text{ cm}$

(iii) $BC = 4\text{ cm}, \angle c = 60^0, AB + AC = 15\text{cm}$

(iv) $AB = 7.5\text{ cm}, \angle B = 90^0, AC - BC = 6\text{ cm}$

हर रचना में, रचना के चरण भी अवश्य लिखें।

नोट : बेहतर समझ के लिए प्रश्नावली 11.2 का अभ्यास करें। (कक्षा 9, एन.सी.आर.टी.)

सांख्यिकी (Statistics)

आंकड़ों का संग्रह / संकलन (Collection of Data)	→	आंकड़ों का संगठन (Organization of Data)	→	आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण (Presentation of Data)	→	आंकड़ों का विश्लेषण (Analysis of Data)	→	निर्वचन / व्याख्या (Interpretation)

आंकड़ों का संग्रह (Collection of Data)

आंकड़े (Data) : एक निश्चित उद्देश्य से किसी दूसरे स्रोत, जैसे– समाचार पत्रों, टेलीविज़नों, पत्रिकाओं आदि से या स्वयं सर्वे कर जो सूचनाएँ या जानकारियाँ एकत्रित की जाती हैं, वे आंकड़े कहलाते हैं।

उदाहरण :

मान लीजिए यदि हम स्वयं 25 विद्यालयों में जाते हैं और यह जानकारी प्राप्त करते हैं कि इन विद्यालयों में 9वीं कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी नामांकित हैं तो यह मेरे द्वारा प्राप्त किए गए इन विद्यालयों में नामांकन के आंकड़े होंगे। ये आंकड़े निम्नलिखित प्रकार से हो सकते हैं।

75	60	90	40	82	46	82	75	54	60	90	87	
54	80	90	72	90	40	90	75	90	54	90	72	46

यथाप्राप्त आंकड़े (Raw Data) : किसी स्रोत से यथा प्राप्त (जैसा है वैसा ही) आंकड़े अर्थात् जिसमें किसी भी प्रकार का बदलाव न किया गया हो, यथाप्राप्त आंकड़े कहलाता है। अगर उन आंकड़ों में कुछ बदलाव कर दिया जाता है तो फिर उस बदले हुए आंकड़े को यथाप्राप्त आंकड़े नहीं कहेंगे।

उदाहरण : 10 बच्चों की आयु (वर्ष में) के आंकड़े नीचे दिए गए हैं, इसमें बताया गया है कि एक ही आंकड़े कब यथाप्राप्त आंकड़े होंगे और कब नहीं।

5, 10, 7, 10, 15, 5, 10, 7, 10, 15 – यथाप्राप्त आंकड़े

इन आंकड़े को बढ़ते क्रम में सजाने पर ये इस प्रकार हो जाएँगे।

5, 5, 7, 7, 10, 10, 10, 10, 15, 15 – यथाप्राप्त आंकड़े नहीं।

अधिकतम आंकड़े (Highest data) :

किसी भी आंकड़े में जो संख्या सबसे बड़ी होती उसे महत्तम आंकड़ा कहते हैं।

पहले बताए गए विद्यालय में नामांकन वाले आंकड़े में,

महत्तम आंकड़ा = 90

न्यूनतम आंकड़े (Lowest data) :

किसी भी आंकड़े में जो संख्या सबसे छोटी होती है उसे न्यूनतम आंकड़ा कहते हैं।

पहले बताए गए विद्यालय में नामांकन वाले आंकड़े में,

न्यूनतम आंकड़ा = 40

आंकड़े के प्रकार (Types of data) :

आंकड़े दो प्रकार के होते हैं।

1. प्राथमिक आंकड़े (Primary data)

2. गौण आंकड़े (Secondary data)

प्राथमिक आंकड़े (Primary data) :

जिन आंकड़ों की विश्वसनीयता या उत्तरदायित्व अन्वेषक (खोजकर्ता) पर निर्भर करता है वे आंकड़े प्राथमिक आंकड़े कहलाते हैं।

'विद्यालयों में 9 वीं कक्षा में नामांकन वाले आंकड़े' में अन्वेषक मैं था और ये आंकड़े मैंने स्वयं तैयार किया था इसलिए ये आंकड़े प्राथमिक आंकड़े हैं।

गौण आंकड़े (Secondary data) :

जिन आंकड़ों की विश्वसनीयता या उत्तरदायित्व अन्वेषक (खोजकर्ता) पर निर्भर नहीं करता है वे आंकड़े गौण आंकड़े कहलाते हैं।

यदि 'विद्यालयों में 9 वीं कक्षा में नामांकन वाले आंकड़े' मैं किसी समाचार पत्र से या कम्प्यूटर आदि से प्राप्त करता तो यहाँ भी अन्वेषक 'मैं' ही होता लेकिन आंकड़े की विश्वसनीयता मुझ पर नहीं होती, क्योंकि ऐसी स्थिति में इन्हें स्वयं सर्वे न करके 'मैं' दूसरे स्रोत का सहारा लिया हुआ माना जाऊँगा।

अतः विद्यालयों में नामांकन वाले ये आंकड़े तब प्राथमिक आंकड़े न होकर गौण आंकड़े हो जाएँगे।

आंकड़ों का संगठन (Organization of Data)

इसके अन्तर्गत आंकड़े को किसी ख़ास गुण या विशेषता जैसे, रंग, आकार, वज़न, उम्र, ऊँचाई, बढ़ते क्रम, घटते क्रम आदि के आधार पर लगाया जाता है। ऐसा करने से हमें आंकड़े का प्रस्तुतिकरण और विश्लेषण करने में आसानी होती है।

उदाहरण: गणित की परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंक :

55 36 95 73 60 78 75 62 42 45

अगर इस आंकड़े से अधिकतम अंक और न्यूनतम अंक पता करना हो तो ढूँढ़ने में थोड़ा ज़्यादा समय लगेगा, जबकि यही आंकड़े यदि निम्नलिखित प्रकार से बढ़ते (आरोही –ascending) क्रम में या घटते (अवरोही–descending) क्रम में व्यवस्थित रहता तो अधिकतम अंक और न्यूनतम अंक ढूँढ़ने में कम समय लगता, जैसे, दिए हुए आंकड़े को बढ़ते क्रम में लगाने पर आंकड़े इस प्रकार संगठित (organized) हो जाएँगे :

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

यहाँ अधिकतम अंक = 95

न्यूनतम अंक = 25

अतः इस दिए हुए आंकड़े में,

अधिकतम आंकड़ा (Highest data) = 95

न्यूनतम आंकड़ा (Lowest data) = 25

अब अभ्यास के लिए अपनी कक्षा की पाठ्य–पुस्तक में दिए गए प्रश्नावली 14.1 को हल करें।

आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण (Presentation of data)

आंकड़ों को एकत्रित करने के बाद इन आंकड़ों को ऐसे रूप में प्रस्तुत करने के तरीकों के बारे में सोचना पड़ता है जो :

- अर्थपूर्ण हो।
- आसानी से समझा जा सकता है।
- एक ही झलक में उसके मुख्य लक्षणों को जाना जा सकता हो।

आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण निम्न दो प्रकार से किया जाता है :

1. संख्यात्मक प्रस्तुतिकरण (Numerical Presentation)
2. आलेखीय प्रस्तुतिकरण (Graphical Presentation)

इन दोनों प्रस्तुतिकरणों पर बात करने से पहले हम सभी निम्नलिखित शब्दावली को जान लेते हैं ताकि आंकड़ों के प्रस्तुतिकरण को समझना आसान हो जाए।

बारंबारता (Frequency) :

किसी भी आंकड़े में कोई संख्या जितनी बार आती है वह उस संख्या की बारंबारता कहलाती है, जैसे– किसी आंकड़े में 10 यदि 5 बार आता हो तो उस आंकड़े में 10 की बारंबारता 5 होगी। बारंबारता को f से चिन्हित किया जाता है।

वर्ग (Classes) या वर्ग अन्तराल (Class intervals) :

जब आंकड़े बड़े होते हैं तो आंकड़े की सभी संख्याओं को समान अन्तराल वाले छोटे–छोटे समूहों में बाँट दिया जाता है जिसे वर्ग या वर्ग अन्तराल कहा जाता है। वर्ग अन्तराल दो प्रकार के होते हैं।

	अतिव्यापी (Overlapping) वर्ग अन्तराल और	अनतिव्यापी (Non-overlapping) वर्ग अन्तराल
उदाहरण :–	10 – 20, (दस से बीस)	10 – 20, (दस से बीस)
	20 – 30, (बीस से तीस)	21 – 31, (इक्कीस से इकतीस)
	30 – 40, (तीस से चालीस)	32 – 42, (बत्तीस से बयालीस)

उपरि वर्ग सीमा (Upper class limit) :

किसी भी वर्ग या वर्ग अन्तराल की सबसे बड़ी संख्या को उस वर्ग या वर्ग अन्तराल की उपरि वर्ग सीमा कहा जाता है, जैसे – वर्ग अन्तराल 10 – 20 में उपरि वर्ग सीमा 20 है।

निम्न वर्ग सीमा (Lower class limit) :

किसी भी वर्ग या वर्ग अन्तराल की सबसे छोटी संख्या को उस वर्ग या वर्ग अन्तराल की निम्न वर्ग सीमा कहा जाता है, जैसे – वर्ग अन्तराल 30 – 40 में निम्न वर्ग सीमा 30 है।

वर्ग–माप (Class size) या वर्ग चौड़ाई (Class width) :

किसी भी वर्ग या वर्ग अन्तराल में जितनी संख्याएँ शामिल होती हैं उसे उस वर्ग अन्तराल या वर्ग का वर्ग–माप कहा जाता है।

अतः वर्ग–माप या वर्ग चौड़ाई = उपरि वर्ग सीमा – निम्न वर्ग सीमा

उदाहरण: वर्ग अन्तराल 30– 40 का वर्ग माप या वर्ग चौड़ाई

$= 40 - 30 = 10$

अतिव्यापी (Overlapping) वर्ग अन्तराल :

किसी वर्ग अन्तराल की बारंबारता निकालने में जब उस वर्ग अन्तराल की उपरि वर्ग सीमा को शामिल नहीं किया जाता है तो ऐसे वर्ग अन्तराल अतिव्यापी वर्ग अन्तराल कहलाते हैं।

जैसे, 10 – 20, 20 – 30, 30 – 40 आदि अतिव्यापी वर्ग अन्तराल हैं क्योंकि बारंबारता निकालने में 10 – 20 में 10 तथा उससे अधिक लेकिन 20 से कम, 20 – 30 में 20 तथा उससे अधिक लेकिन 30 से कम, 30 से 40 में 30 तथा उससे अधिक लेकिन 40 से कम तक की संख्याओं को गिना जाएगा।

इस तरह के वर्ग अन्तराल में,

वर्ग माप (Class size) = उपरि वर्ग सीमा – निम्न वर्ग सीमा

अतः वर्ग अन्तराल 30 – 40 में,

वर्ग माप = 40 – 30 = 10

अनतिव्यापी (Non-overlapping) वर्ग अन्तराल :

किसी वर्ग अन्तराल की बारंबारता निकालने में जब उस वर्ग अन्तराल की उपरि वर्ग सीमा को भी शामिल किया जाता है तो ऐसे वर्ग अन्तराल अनतिव्यापी वर्ग अन्तराल कहलाते हैं।

जैसे, 20 – 29, 30 – 39, 40 – 49 आदि अनतिव्यापी वर्ग अन्तराल हैं क्योंकि बारंबारता निकालने में 20 – 29 में 20 से लेकर 29 तक, 30 – 39 में 30 से लेकर 39 तक तथा 40 – 49 में 40 से लेकर 49 तक की संख्याओं को गिना जाएगा।

इस तरह के वर्ग अन्तराल में,

वर्ग माप = (उपरि वर्ग सीमा – निम्न वर्ग सीमा) + 1

अतः वर्ग अन्तराल 20 – 29 में,

वर्ग माप = (29 – 20) + 1

= 9 + 1 = 10

वर्ग चिह्न (Class - marks) :

किसी भी अतिव्यापी या अनतिव्यापी वर्ग अन्तराल के मध्य बिन्दु को उस वर्ग अन्तराल का वर्ग–चिह्न कहा जाता है।

अतिव्यापी अतः वर्ग चिह्न = $\dfrac{\text{उपरि वर्ग सीमा + निम्न वर्ग सीमा}}{2}$

वर्ग अन्तराल 10 – 20 का वर्ग चिह्न

$$= \frac{20 + 10}{2} = \frac{\cancel{30}^{15}}{\cancel{2}} = 15$$

तथा अनतिव्यापी वर्ग अन्तराल 20 – 29 का वर्ग चिह्न

$$= \frac{20 + 29}{2} = \frac{\cancel{49}^{24.5}}{\cancel{2}} = 24.5$$

परिसर (Range) :

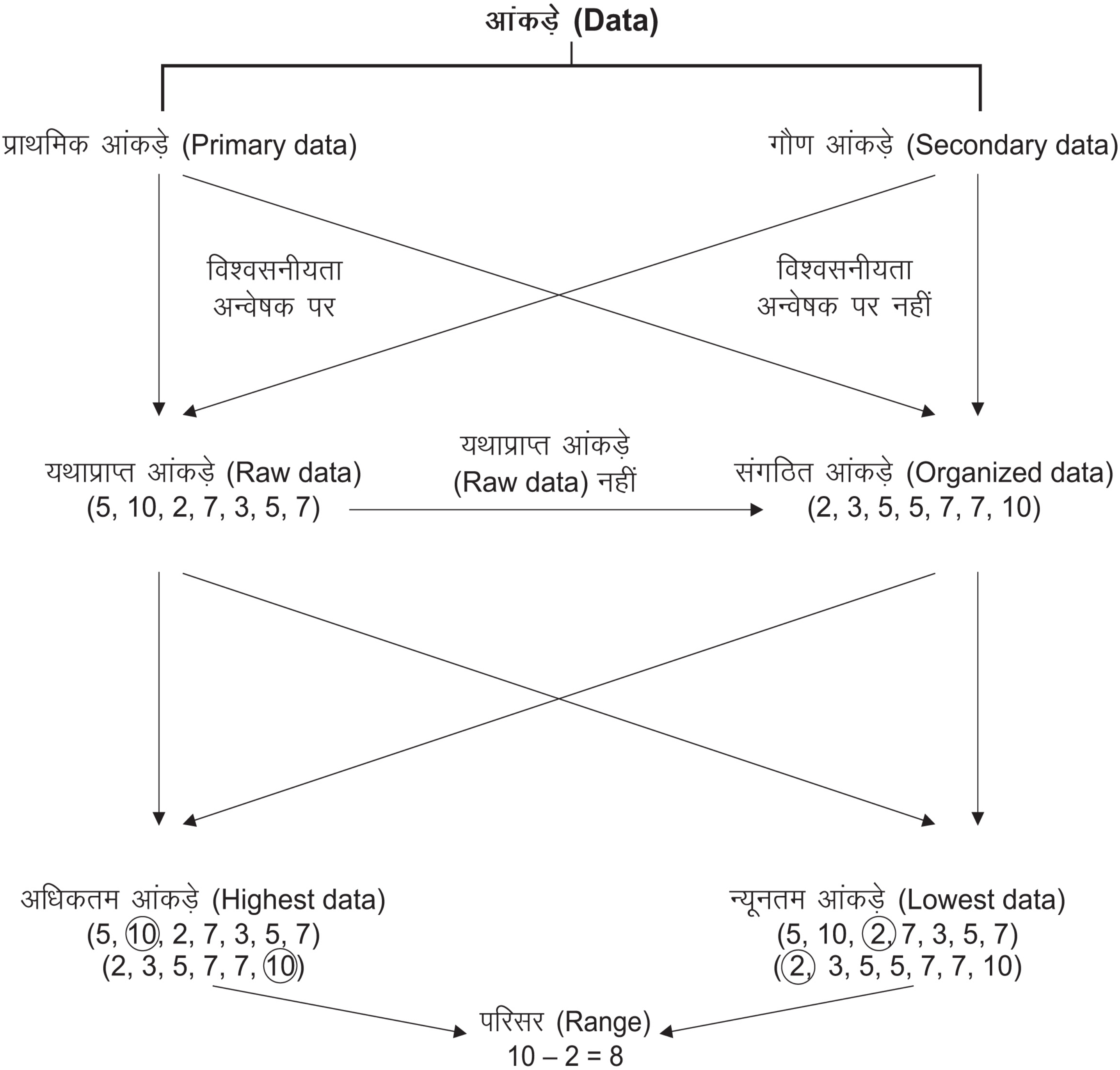
अधिकतम आंकड़े और न्यूनतम आंकड़े के अन्तर को परिसर कहा जाता है।

अतः परिसर = अधिकतम आंकड़ा – न्यूनतम आंकड़ा

उदाहरण : आंकड़े 5, 7, (3), 7, (15), 8, 5 में — अधिकतम आंकड़ा (15), न्यूनतम आंकड़ा (3)

परिसर = 15 − 3 = 12

किसी भी आंकड़े का परिसर इस बात में मदद करता है कि उस आंकड़े में कितने वर्ग–माप रखने से कितने वर्ग अन्तराल बनेंगे। **इसके लिए परिसर में वर्ग–माप से भाग दिया जाता है और जो भागफल आता है उससे एक अधिक वर्ग अन्तराल बनता है। लेकिन अनतिव्यापी वर्ग अन्तराल में जब शेषफल शून्य बचता है तो जितना भागफल आता है उतना ही वर्ग अन्तराल बनता है।** यदि कोई शर्त न हो तो वर्ग–माप अपने मन से कुछ भी लिया जा सकता है। ध्यान रखें कि किसी भी आंकड़े में कम से कम 5 और अधिक से अधिक 10 वर्ग अन्तराल बने। इससे आंकड़े का प्रस्तुतिकरण अच्छा होता है। किसी आंकड़े को जब वर्गीकृत (grouped) या अवर्गीकृत (ungrouped) रूप में सारणी में दर्शाया जाता है तो इसे सारणी रूप (tabular form) में दर्शाना भी कहा जाता है।



अब नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करें।

प्रश्न1 : नीचे बायीं तरफ़ 30 बच्चों की आयु (वर्ष में) के आंकड़े दिए गए हैं। इन आंकड़ों को देखकर दायीं तरफ़ दी गई सारणी (table) में संख्याएँ और उनकी बारंबारता (frequency) को लिखें।

14	16	20	17	14
14	16	20	14	16
17	16	14	20	16
17	14	16	17	14
14	20	14	14	17
14	17	14	20	14

आयु (वर्ष में)	बारंबारता (frequency)
कुल	

प्रश्न2 : नीचे दो सारणी (table) दी गई हैं जिनमें कुछ वर्ग अन्तराल (class intervals) लिखे हुए हैं। आपको इन वर्ग अन्तरालों को देखकर सारणी के बाकी स्तम्भ (column) को भरने हैं।

वर्ग अन्तराल (class intervals)	उपरि वर्ग सीमा (upper class limit)	निम्न वर्ग सीमा (lower class limit)	वर्ग–माप (class size)	वर्ग–चिन्ह (class marks)
28 - 38				
38 - 48				
48 - 58				
58 - 68				
68 - 78				

वर्ग अन्तराल (class intervals)	उपरि वर्ग सीमा (upper class limit)	निम्न वर्ग सीमा (lower class limit)	वर्ग–माप (class size)	वर्ग–चिन्ह (class marks)
28 - 38				
39 - 49				
50 - 60				
61 - 71				
72 - 82				

प्रश्न 3 : नीचे 25 लोगों के वज़न (kg में) के आंकड़े दिए हुए हैं। इन आंकड़ों का पहले परिसर (Range) निकालें और फिर दी गई सारणी में अलग–अलग वर्ग माप (class size) के अनुसार इन आंकड़ों से बनने वाले वर्ग अन्तरालों (class intervals) की संख्या लिखें।

28	32	45	37	36
18	36	28	32	45
36	32	45	28	16
80	37	45	16	28
45	32	80	37	18

वर्ग–माप (class size)	अतिव्यापी (overlapping) वर्ग अन्तरालों की संख्या	अनतिव्यापी (non-overlapping) वर्ग अन्तरालों की संख्या
7		
9		
10		
8		

आंकड़े का संख्यात्मक प्रस्तुतिकरण (Numerical Presentation of data)

इस प्रस्तुतिकरण में संख्याओं को आधार बनाया जाता है। इसमें संख्याओं को या तो वर्गों में बाँटकर या बिना वर्गों में बाँटे हुए एक सारणी में दर्शाया जाता है। इस सारणी से ये पता चलता है कि कौन–सी संख्या आंकड़े में कितनी बार आयी है। दोनों तरह की सारणी के बारे में नीचे उदाहरण के साथ बताया गया है।

अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी (ungrouped frequency distribution table)

जब किसी आंकड़े की प्रत्येक संख्या को किसी वर्ग या समूह में बाँटे बिना उसे संगत बारंबारता के साथ किसी सारणी में दर्शाया जाता है तो आंकड़े के ऐसे प्रस्तुतिकरण को अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी में प्रस्तुतिकरण कहा जाता है।

उदाहरण 1 : एक विद्यालय की 9वीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा (100 अंकों में से) प्राप्त किए गए अंक के नीचे दिए गए आंकड़े का अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाएँ।

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

हल :

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (अर्थात् बारंबारता)
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
कुल योग	**30**

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी (grouped frequency distribution table)

जब किसी आंकड़े की प्रत्येक संख्या को किसी वर्ग या समूह में बांटकर उसे संगत बारंबारता के साथ किसी सारणी में दर्शाया जाता है तो आंकड़े के ऐसे प्रस्तुतिकरण को वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी में प्रस्तुतिकरण कहा जाता है। वर्ग या वर्ग अन्तराल अतिव्यापी (overlapping) या अनतिव्यापी (non - overlapping) दोनों हो सकते हैं। इस तरह के प्रस्तुतिकरण में मिलान चिह्न (tally marks) की भी ज़रूरत पड़ती है। दरअसल आंकड़े में जब एक तरफ़ से बारी–बारी सभी संख्याओं को देखते हैं तो जो संख्या जिस वर्ग अन्तराल में आती है उसमें एक–एक खड़ी लाईन खींचते जाते हैं और बाद में सभी लाईन को गिनकर प्रत्येक वर्ग अन्तराल की बारंबारता लिख देते हैं। 4 खड़ी लाईन के बाद 5 वीं के लिए उसे एक तिरछी लाईन से काट देते हैं जो कि 5 का सूचक होता है।

जैसे – | = 1, || = 2, ||| = 3, |||| = 4, |||| = 5, ~~||||~~| = 6

उदाहरण 1 : 100 विद्यालयों में वन महोत्सव का आयोजन किया गया। प्रत्येक विद्यालय में 100 पौधे लगाए गए। एक महीने बाद लगाए गए पौधों में से बच गए पौधों की संख्याएँ निम्नलिखित थीं। इस दिए हुए आंकड़े से वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाएँ।

95	67	28	32	65	65	69	33	98	96	76	42	32	38	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	85	62	37	65	63	42	89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82	86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68	69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42	53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

हल :

अतिव्यापी (overlapping)

वर्ग अन्तराल के रूप में,

अधिकतम आंकड़ा = 98

न्यूनतम आंकड़ा = 23

परिसर = 98 − 23 = 75

वर्ग माप 10 लेने पर,

वर्ग अन्तरालों की संख्या

= (75 ÷ 10) का भागफल + 1

बचे हुए पौधों की संख्या	मिलान चिह्न	विद्यालय की संख्या (बारंबारता)
23 − 33	卌 ||	7
33 − 43	卌 卌 卌 |	17
43 − 53	卌 |||	8
53 − 63	卌 ||	7
63 − 73	卌 卌 卌 |	16
73 − 83	卌 卌 ||||	14
83 − 93	卌 卌 卌 卌 卌	25
93 − 103	卌 |	6
योग		**100**

= 7 + 1 = 8, (क्योंकि अतिव्यापी वर्ग अन्तराल में उपरि वर्ग सीमा को शामिल नहीं किया जाता है। इसलिए वर्ग अन्तराल की संख्या एक और बढ़ाना पड़ता है ताकि उपरि वर्ग सीमा वाली संख्या भी गिनी जा सके।)

अनतिव्यापी (non - overlapping)

वर्ग अन्तराल के रूप में,

अधिकतम आंकड़ा = 98

न्यूनतम आंकड़ा = 23

परिसर = 98 − 23 = 75

वर्ग − माप 10 लेने पर,

वर्ग अन्तरालों की संख्या =

(75÷10) का भागफल + 1, जब शेषफल ≠ 0

या

बचे हुए पौधों की संख्या	मिलान चिह्न	विद्यालय की संख्या (बारंबारता)
23 − 32	卌 ||	7
33 − 42	卌 卌 卌 |	17
43 − 52	卌 |||	8
53 − 62	卌 ||	7
63 − 72	卌 卌 卌 |	16
73 − 82	卌 卌 ||||	14
83 − 92	卌 卌 卌 卌 卌	25
93 − 102	卌 |	6
योग		**100**

(75÷10) का भागफल, जब शेषफल = 0, (क्योंकि अनतिव्यापी वर्ग अन्तराल में उपरि वर्ग सीमा को भी शामिल किया जाता है।)

यहाँ 75 में 10 से भाग देने पर शेषफल शून्य नहीं होता है,

इसलिए वर्ग अन्तरालों की संख्या = (75÷10) का भागफल + 1 = 7 + 1 = 8

नोट : संयोगवश यहाँ भी सभी वर्ग अन्तरालों की बारंबारता अतिव्यापी वाले वर्ग अन्तरालों की ही तरह आ गई, लेकिन हमेशा ऐसा नहीं होता है।

हम साधारणतः अतिव्यापी बारंबारता सारणी ही बनाते हैं जबतक कुछ निर्देश न दिया जाए।

अनतिव्यापी (non-overlapping) वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी को अतिव्यापी (overlapping) वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी में बदलना :

अनतिव्यापी को अतिव्यापी में बदलने के लिए अनतिव्यापी के सभी वर्ग अन्तरालों की निम्न वर्ग सीमा में से सिर्फ 0.5 घटाना होता है और उपरि सीमा में 0.5 जोड़ना होता है। बारंबारता वही रहती है जबतक कि कोई और नया आंकड़ा शामिल न किया जाए। नये आंकड़े शामिल करने से वे जिस वर्ग अन्तराल में पड़ेंगे केवल उनकी बारंबारता बढ़ जाएगी शेष सभी वर्ग अन्तरालों की बारंबारता वही रहेगी।

उदाहरण 1: नीचे दी गई अनतिव्यापी (non - overlapping) वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी को अतिव्यापी (overlapping) वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी में बदलें।

बचे हुए पौधों की संख्या	मिलान चिह्न	विद्यालय की संख्या (बारंबारता)
23 – 32	𝍸 ||	7
33 – 42	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17
43 – 52	𝍸 |||	8
53 – 62	𝍸 ||	7
63 – 72	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
73 – 82	𝍸 𝍸 ||||	14
83 – 92	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	25
93 – 102	𝍸 |	6
योग		**100**

हल :

बचे हुए पौधों की संख्या	मिलान चिह्न	विद्यालय की संख्या (बारंबारता)
22.5 - 32.5	𝍸 ||	7
32.5 - 42.5	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17
42.5 - 52.5	𝍸 |||	8
52.5 - 62.5	𝍸 ||	7
62.5 - 72.5	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
72.5 - 82.5	𝍸 𝍸 ||||	14
82.5 - 92.5	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	25
92.5 - 102.5	𝍸 |	6
योग		**100**

उदाहरण 2 : निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी में एक कक्षा के 38 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं। यदि 35.5 kg और 40.5 kg के भार वाले दो और विद्यार्थी इस कक्षा में आ जाएँ, तो उन्हें किस वर्ग अंतराल में रखा जाएगा?

भार (kg में)	विद्यार्थियों की संख्या (अर्थात् बारंबारता)
31 – 35	9
36 – 40	5
41 – 45	14
46 – 50	3
51 – 55	1
56 – 60	2
61 – 65	2
66 – 70	1
71 – 75	1
कुल योग	**38**

हल :

भार (kg में)	विद्यार्थियों की संख्या (अर्थात् बारंबारता)
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
60.5 – 65.5	2
65.5 – 70.5	1
70.5 – 75.5	1
कुल योग	**40**

चूँकि कक्षा में दो विद्यार्थी और आ गए हैं जिनको दी हुई बारंबारता बंटन सारणी के किसी भी वर्ग अन्तराल में नहीं रखा जा सकता क्योंकि 35.5 और 40.5 किसी भी वर्ग अन्तराल में नहीं मिल रहा है। अतः दी हुई अनतिव्यापी बारंबारता बंटन सारणी को पहले अतिव्यापी बारंबारता बंटन सारणी में बदलना होगा और फिर देखना होगा कि ये भार वाली संख्याएँ किस वर्ग अन्तराल में मिल रही हैं। जिस वर्ग अन्तराल में ये संख्याएँ मिलेंगी उसकी बारंबारता बढ़ा देंगे। नये अतिव्यापी बारंबारता बंटन सारणी में विद्यार्थियों की भी कुल संख्या 38 के बदले 40 हो जाएगी। अब अतिव्यापी बारंबारता बंटन सारणी में बदलने पर, हल वाली सारणी से स्पष्ट है कि 35.5 दूसरे वर्ग अन्तराल में आएगा और 40.5 तीसरे वर्ग अन्तराल में। यही कारण है कि इन दोनों वर्ग अन्तरालों की बारंबारता एक – एक बढ़ गयी है।

आंकड़े का संख्यात्मक प्रस्तुतिकरण
(Numerical Presentation of Data)

अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी (Ungrouped frequency distribution table)

प्राप्त अंक (50 में से)	बारंबारता (f)
25	8
32	3
33	9
45	6
49	2
कुल	28

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी (Grouped frequency distribution table)

अतिव्यापी (Overlapping)

प्राप्त अंक (50 में से)	बारंबारता (f)
25 – 33	11
33 – 41	9
41 – 49	6
49 – 57	2
कुल	28

अनतिव्यापी (Non-overlapping)

प्राप्त अंक (50 में से)	बारंबारता (f)
25 – 33	20
34 – 42	0
43 – 51	8
कुल	28

वर्ग अन्तराल (Class intervals)

अतिव्यापी (Overlapping)

10 - 20
20 - 30
30 - 40

निम्न वर्ग सीमा (Lower class limit) ← बायाँ अंक; उपरि वर्ग सीमा (Upper class limit) ← दायाँ अंक

वर्ग माप (Class size)
40 - 30 = 10

अनतिव्यापी (Non-overlapping)

10 - 20
21 - 31
32 - 42

वर्ग–चिन्ह (Class - marks)

$$= \frac{32 + 42}{2} = \frac{74}{2} = 37$$

वर्ग–माप (Class size)
= (31 – 21) + 1
= 10 + 1 = 11

अभ्यास के लिए अपनी कक्षा की पाठ्य–पुस्तक में दी गई प्रश्नावली 14.2 को हल करें।

आंकड़े का आलेखीय प्रस्तुतिकरण (Graphical Presentation of data)

संख्यात्मक प्रस्तुतिकरण की तुलना में आलेखीय प्रस्तुतिकरण समझना अधिक आसान होता है। इसे समझने में समय भी कम लगता है। इसमें कई मदों की तुलना एक साथ आसानी से की जा सकती है। साथ ही आंकड़ों का विश्लेषण कर आसानी से उसकी व्याख्या या निर्वचन (interpretation) किया जा सकता है। यहाँ हम केवल निम्नलिखित तीन आलेखीय प्रस्तुतिकरण की बात करेंगे।

1. दंड आलेख (Bar Graph)
2. आयतचित्र (Histograms)
3. बारंबारता बहुभुज (Frequency Polygons)

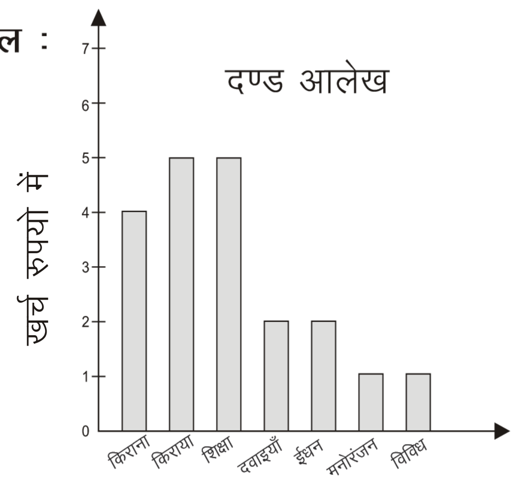
दंड आलेख (Bar graph):

चर और बारंबारता से बने आलेख को दंड आलेख कहा जाता है। दंड आलेख आंकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्रायः एक अक्ष (मान लीजिए x - अक्ष) पर किसी चर को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दंड खींचे जाते हैं जिनके बीच में बराबर–बराबर दूरियाँ छोड़ी जाती हैं। चर की बारंबारता को दूसरे अक्ष (मान लीजिए y - अक्ष) पर दिखाए जाते हैं और दंडों की ऊँचाइयाँ चर की संगत बारंबारता पर निर्भर करती हैं।

उदाहरण 1: एक परिवार ने जिसकी मासिक आय 20000 रुपये है, विभिन्न मदों के अंतर्गत हर महीने होने वाले ख़र्च की निम्नलिखित प्रकार से योजना बनाई थी। इस दिए हुए आंकड़े का एक दंड आलेख बनाइए।

मद	ख़र्च (हज़ार रुपयों में)
किराना	4
किराया	5
शिक्षा	5
दवाईयाँ	2
ईंधन	2
मनोरंजन	1
विविध	1

हल :



यहाँ आप एक दृष्टि में ही आंकड़ों के सभी पहलुओं को सरलता से देख सकते हैं। उदाहरण के लिए, आप यह सरलता से देख सकते हैं कि किराना पर किया गया ख़र्च दवाइयों पर किए गए ख़र्च का दोगुना है। अतः, कुछ अर्थों में सारणी रूप की अपेक्षा यह आंकड़ों का एक उत्तम प्रस्तुतिकरण है।

आयत चित्र (Histograms) :

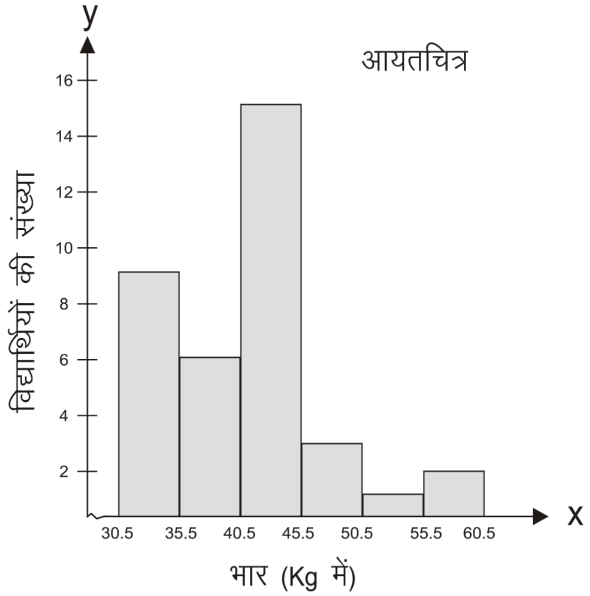
वर्ग अन्तराल और बारंबारता से बने आलेख को आयत चित्र कहा जाता है। आयत चित्र भी आंकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्रायः एक अक्ष (मान लीजिए x - अक्ष) पर वर्ग अन्तराल को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दंड खींचे जाते हैं जिनके बीच में कोई दूरियाँ नहीं छोड़ी जाती हैं। वर्ग अन्तराल के संगत बारंबारता दूसरे अक्ष (मान लीजिए y - अक्ष) पर दिखाए जाते हैं और दंडों की ऊँचाइयाँ बारंबारता के मानों पर निर्भर करती हैं।

आयतचित्र में प्रत्येक वर्ग अन्तराल की चौड़ाई समान होती है। x - अक्ष और y - अक्ष के कटान बिन्दु का मान शून्य (0) होता है। अगर बारंबारता सारणी में वर्ग अन्तराल शून्य (0) से शुरू नहीं होता है तो इसका आयत चित्र बनाने में x - अक्ष के शुरुआत में कुछ दूरी तक टेढ़ी–मेढ़ी लाईन खींचनी होती है और फिर सीधी लाईन। इस टेढ़ी –मेढ़ी लाईन को **निकुंच (kink)** कहा जाता है।

उदाहरण 1 : नीचे दी गई बारंबारता बंटन सारणी में एक कक्षा के 36 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं। इन आंकड़ों से एक आयत चित्र बनाइए।

भार (kg में)	विद्यार्थियों की संख्या
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
कुल योग	**36**

हल :



नोट : आयतचित्र बनाने में अनतिव्यापी (non-overlapping) वर्ग अन्तराल को पहले अतिव्यापी (overlapping) वर्ग अन्तराल में बदल लिया जाता है।

बारंबारता बहुभुज (Frequency polygon) :

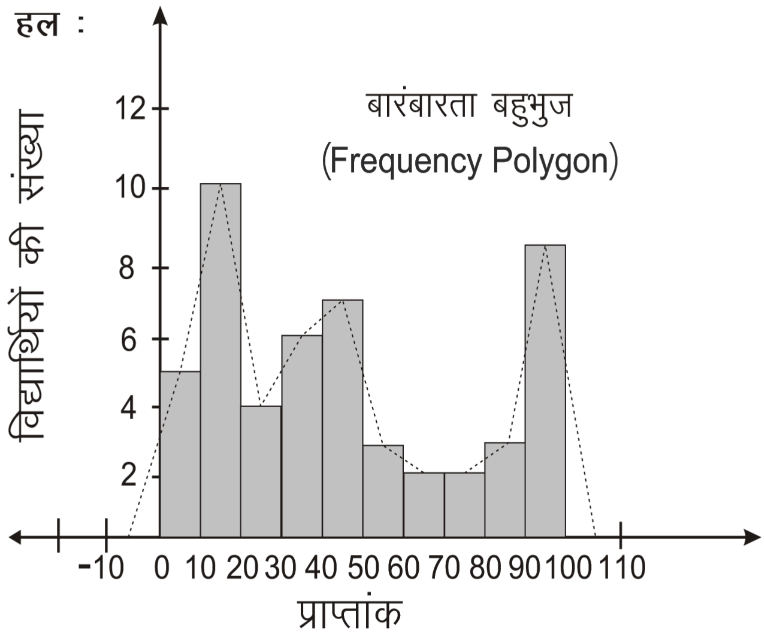
वर्ग अन्तराल के मध्य बिन्दु या वर्ग चिह्न (class - marks) और बारंबारता से बने आलेख को बारंबारता बहुभुज कहा जाता है। इसे बनाने के लिए या तो पहले आयत चित्र बना लेते हैं और फिर उसके मध्य बिन्दुओं को खंडित रेखाखण्डों (dotted line segments) से जोड़ दिया जाता है या पहले सभी वर्ग अन्तराल का वर्ग चिह्न निकाल लिया जाता है और फिर वर्ग चिह्न को x - अक्ष में तथा बारंबारता को y - अक्ष में रख कर बिन्दुओं का निर्धारण करते हैं और उन्हें रेखाखण्डों (line segments) से जोड़ देते हैं।

बारंबारता बहुभुज का प्रयोग तब किया जाता है जब आंकड़ें सतत (Continuous) और बहुत अधिक होते हैं। यह समान प्रवृत्ति के दो अलग–अलग आंकड़ों की तुलना करने में, अर्थात् एक ही कक्षा के दो अलग–अलग भागों के प्रदर्शनों की तुलना करने में अधिक उपयोगी होता है।

उदाहरण 1 : एक परीक्षा में एक कक्षा के 51 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त किए अंक निम्नलिखित बारंबारता सारणी में दिए गए हैं। इस बारंबारता बंटन सारणी के संगत बारंबारता बहुभुज बनाइए।

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 – 10	5
10 – 20	10
20 – 30	4
30 – 40	6
40 – 50	7
50 – 60	3
60 – 70	2
70 – 80	2
80 – 90	3
90 – 100	9
कुल योग	**51**

हल :



नोट : बारंबारता बहुभुज आयतचित्र के साथ बनाने में x – अक्ष की बायीं और दायीं दोनों तरफ़ एक–एक अतिरिक्त वर्ग अन्तराल लेकर उसका मध्य बिन्दु लेना होता है।

उदाहरण 2 : एक नगर में निर्वाह ख़र्च सूचकांक (cost of living index) का अध्ययन करने के लिए साप्ताहिक प्रेक्षण किए गए। दायीं ओर दिए गए इन आंकड़ों का एक बारंबारता बहुभुज (आयतचित्र बनाए बिना) बनाइए।

निर्वाह खर्च सूचकांक	सप्ताहों की संख्या
140 – 150	5
150 – 160	10
160 – 170	20
170 – 180	9
180 – 190	6
190 – 200	2
कुल योग	**52**

हल :

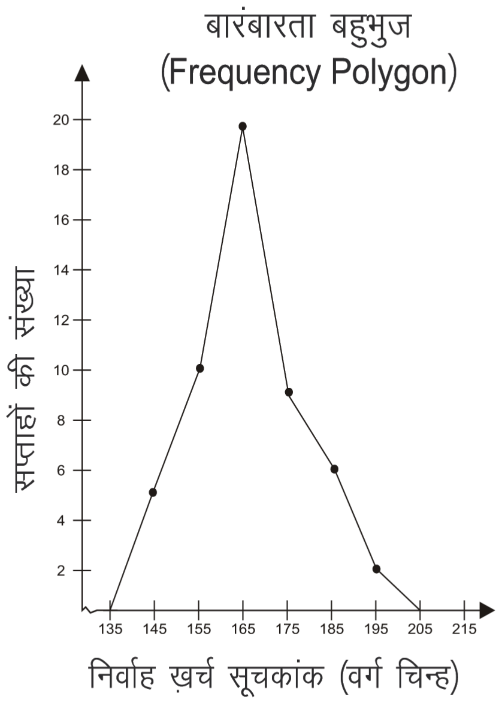
क्योंकि आयत चित्र बनाए बिना हम एक बारंबारता बहुभुज खींचना चाहते हैं, इसलिए हमें सबसे पहले इन सभी वर्ग अन्तरालों का वर्ग – चिह्न मालूम करना होगा।

हम जानते हैं कि किसी भी वर्ग अन्तराल में,

$$\text{वर्ग– चिह्न (Class - marks)} = \frac{\text{उपरि वर्ग सीमा + निम्न वर्ग सीमा}}{2}$$

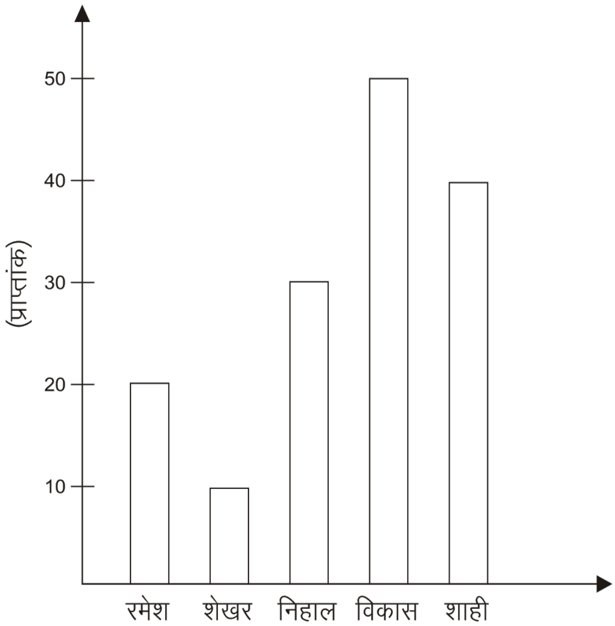
अतः सभी वर्ग अन्तरालों का वर्ग चिह्न निकालने के बाद अब सारणी निम्न प्रकार से हो जाएगी।

निर्वाह खर्च सूचकांक	वर्ग चिह्न	सप्ताहों की संख्या
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
योग		**52**

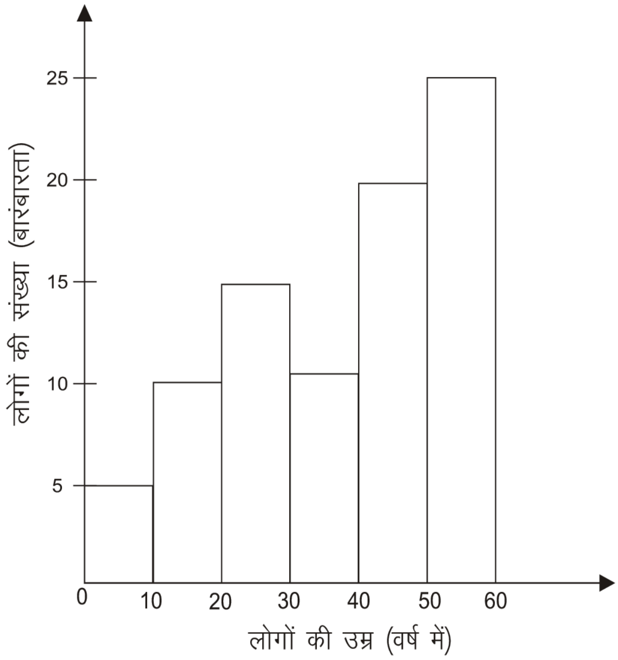


आंकड़ो का आलेखीय प्रस्तुतिकरण
(Graphical Presentation of Data)

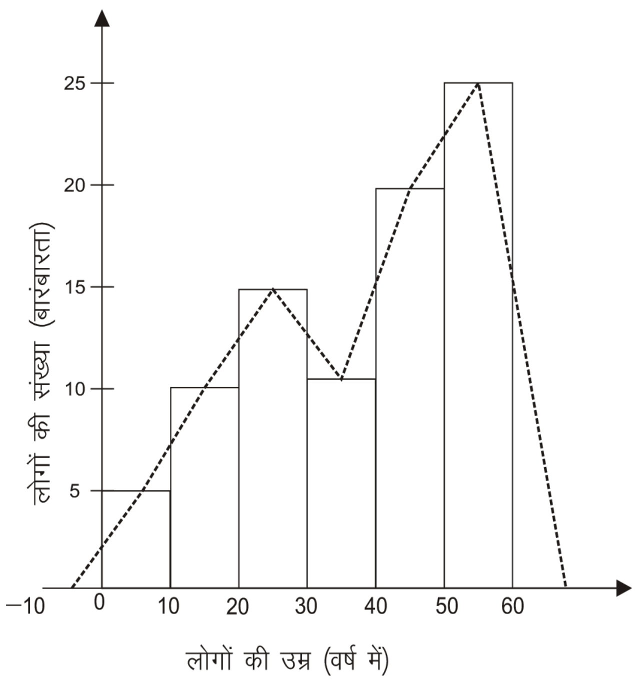
दण्ड आलेख (Bar Graph)



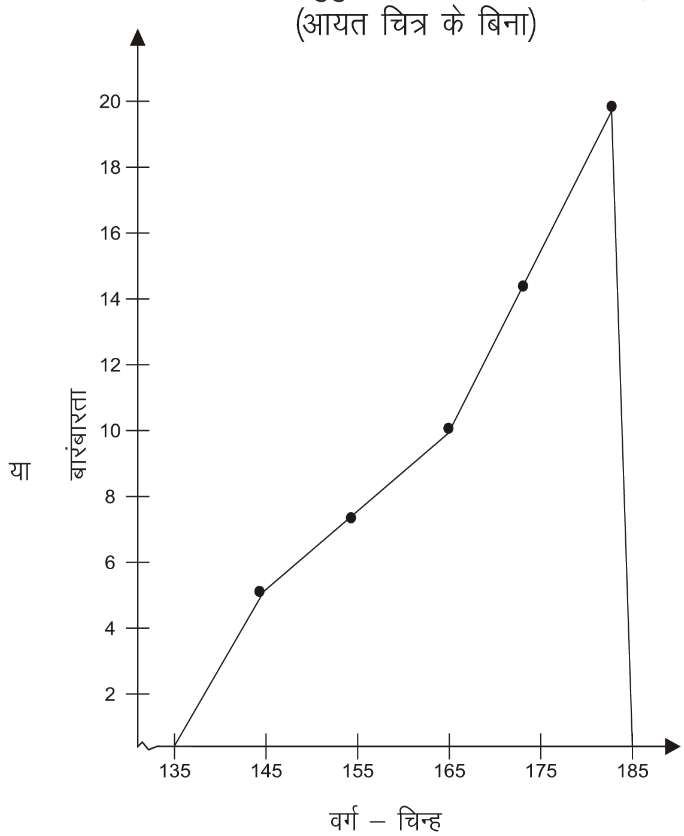
आयत चित्र (Histogram)



बारंबारता बहुभुज (Frequency Polygon)
(आयत चित्र के साथ)



बारंबारता बहुभुज (Frequency Polygon)
(आयत चित्र के बिना)



अभ्यास के लिए अपनी कक्षा की पाठ्य–पुस्तक में दी गई प्रश्नावली 14.3 को हल करें।

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप (Measures of central tendency)

अभी तक हमने बारंबारता बंटन सारणियों, दंड–आलेखों, आयतचित्रों और बारंबारता बहुभुजों की सहायता से आंकड़ों को विभिन्न रूपों में प्रस्तुत किया है। अब प्रश्न यह उठता है कि क्या आंकड़ों को अर्थपूर्ण बनाने के लिए हमें सदैव ही सभी आंकड़ों का अध्ययन करने की आवश्यकता होती है या क्या हम इन आंकड़ों के केवल कुछ प्रतिनिधि लेकर इनके कुछ महत्त्वपूर्ण अभिलक्षणों का पता लगा सकते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों (measures of central tendency) माध्य (mean), माध्यक या माध्यिका (median) तथा बहुलक (mode) की सहायता से ऐसा किया जा सकता है। अभी हम लोग इनके बारे में बारी–बारी बातचीत करेंगे।

माध्य (mean)

अच्छा, अगर कोई आपसे पूछे कि आपकी कक्षा में रोज़ाना कितने बच्चे आते हैं या आप हर दिन कितनी रोटियाँ खा लेते हैं या कितने घंटे सोते हैं तो आप इसका उत्तर कैसे देते हैं?

कैसे देते हैं से मेरा मतलब है कि इनका उत्तर हमेशा एक जैसा तो होता नहीं, कभी ज़्यादा भूख लगी होती है अगर मनपसन्द सब्ज़ी बनी होती है तो ज़्यादा रोटी भी खा लेते हैं और कभी दोस्तों के साथ बाहर कुछ खा–पी लिया तो कम ही रोटी खा पाते हैं। फिर भी अगर कोई ऐसे सवाल करते हैं तो हम कुछ जवाब तो देते ही हैं न? वह जवाब कहाँ से आता है? अनुमान या अन्दाज़े से न? सही है, हम सब ऐसा ही करते हैं। जो पूरी तरह से सही न भी हो किन्तु लगभग सही हो। ये नहीं कि खाते हैं 4 और बता देंगे 40 रोटी, है न?

अब मान लीजिए सवाल करने वाले ने यह पूछा कि पिछले 3 दिन के हिसाब से बताइए कि आपने प्रतिदिन कितनी रोटियाँ खाई हैं और आपको याद है कि पिछले तीन दिन में आपने क्रमशः 5, 6 और 4 रोटियाँ खाई हैं तो आप उन्हें क्या कहेंगे?

6 कहना थोड़ा ज़्यादा हो जाएगा और 4 कहना थोड़ा कम। शायद 5 ठीक रहेगा जो दोनों के बीच आता है और हमारे उत्तर के सबसे क़रीब है।

अच्छा मान लीजिए सवाल करने वाला आपको थोड़ा और परेशान करना चाह रहा है और उसने आपसे पूछ लिया कि किसी घर में पिछले 10 दिनों में प्रतिदिन लगभग कितनी रोटियाँ बनी होंगी? उन्होंने एक सारणी बनाकर आपको दे दी।

दिन	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
रोटियों की संख्या	18	16	19	12	0	22	18	18	17	20

अब आप इसका क्या जवाब देंगे? सिर्फ़ अन्दाज़ा लगाना तो कठिन होगा।

गणित में हमारे पास इसके लिए एक तरीक़ा है जिसे हम 'औसत' के नाम से जानते हैं। औसत निकालने के लिए हम सारी संख्याओं को जोड़ते हैं और जितनी संख्याएँ हैं, उससे भाग करते हैं।

$$\text{औसत} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n}{n}$$, जहाँ n = कुल संख्या,

x_1 = पहली संख्या, x_2 = दूसरी संख्या आदि

अब अपने पिछले सवाल पर आते हैं जिसमें किसी घर में 10 दिनों में बनी रोटियों की संख्या दी गई है।

औसत = $\frac{18 + 16 + 19 + 12 + 0 + 22 + 18 + 18 + 17 + 20}{10}$

$= \frac{\cancel{160}^{16}}{\cancel{10}} = 16$

मतलब, इसका उत्तर 16 होना चाहिए। हम कह सकते हैं कि उस घर में प्रतिदिन औसतन 16 रोटियाँ बनती है। गणित के इस विशेष भाग सांख्यिकी में इसी औसत की अवधारणा को 'माध्य' (mean) के नाम से जाना जाता हैं। इसे $\bar{x}$ (x दंड – x bar) से सूचित करते हैं।

माध्य ($\bar{x}$) = $\frac{\text{दिए गए सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$, (प्रेक्षण मतलब आंकड़े में जो संख्याएँ होती हैं)

आइए अब माध्य (mean) के कुछ प्रश्नों को हल करके देखते हैं।

प्रश्न 1 : यदि आंकड़े 6, 8, 10, 3, 7 एवं m का माध्य 7 है तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

दिए हुए आंकड़ों में,

प्रेक्षणों की कुल संख्या = 6

माध्य = 7

m = ?

सभी प्रेक्षणों का कुल योग = 6 + 8 + 10 + 3 + 7 + m

= 34 + m

या

सभी प्रेक्षणों का कुल योग = प्रेक्षणों की कुल संख्या x माध्य

= 6 x 7 = 42

उपरोक्त दोनों ही सभी प्रेक्षणों का योग है, इसलिए ये दोनों आपस में बराबर होंगे।

अतः, 34 + m = 42

m = 42 – 34 = 8

उत्तर = 8

प्रश्न 2 : 8 विद्यार्थियों का माध्य अंक 65 है। यदि सात विद्यार्थियों के अंक 60, 70, 55, 50, 60, 65 एवं 85 हैं, तो आठवें विद्यार्थी के अंक ज्ञात कीजिए।

हल :

8 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का कुल योग = माध्य अंक x ⑧ → विद्यार्थियों की कुल संख्या

= 65 x 8 = 520

7 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का कुल योग = 60 + 70 + 55 + 50 + 60 + 65 + 85

= 445

अतः आठवें विद्यार्थी द्वारा प्राप्त अंक

= 520 – 445 = 75

उत्तर = 75

प्रश्न 3 : 5 विद्यार्थियों की माध्य आयु 15 वर्ष है। यदि एक शिक्षक की आयु को भी शामिल कर लिया जाता है तो माध्य आयु 4 वर्ष बढ़ जाती है। बातइए, शिक्षक की आयु कितनी है?

हल :

5 विद्यार्थियों की माध्य आयु = 15 वर्ष

5 विद्यार्थियों की आयु का कुल योग = 15 वर्ष x 5 = 75 वर्ष

शिक्षक सहित 5 विद्यार्थियों की माध्य आयु

= 15 वर्ष + 4 वर्ष = 19 वर्ष

अब चूँकि शिक्षक और विद्यार्थियों को मिलाकर कुल संख्या 6 हो गई।

इसलिए,

शिक्षक सहित 5 विद्यार्थियों की आयु का कुल योग = 19 वर्ष x 6

= 114 वर्ष

अतः, शिक्षक की आयु = 114 वर्ष − 75 वर्ष = 39 वर्ष

उत्तर = 39 वर्ष

माध्यिका (Median)

जैसे कि हम समझ चुके हैं कि माध्य को मुख्यतः दिए हुए आंकड़ों का मध्य/केन्द्र बिन्दु निकालने के लिए इस्तेमाल किया जाता है पर, क्या हमेशा यह तरीक़ा काम आएगा? चलिए, पिछली सारणी में थोड़ा हेर–फेर करके देखते हैं।

दिन	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
रोटियों की संख्या	50	62	55	58	60	53	4	3	2	3

हालाँकि, हमारा यह उदाहरण बहुत व्यवहारिक नहीं है, पर ऐसे आंकड़े किसी और परिस्थिति में मिलना बहुत स्वभाविक है। समझ की सरलता के लिए हमने यहाँ परिस्थिति को बदला नहीं है। चलिए अब इसका माध्य निकालते हैं:–

माध्य $(\overline{x}) = \dfrac{50 + 62 + 55 + 58 + 60 + 53 + 4 + 3 + 2 + 3}{10}$

$= \dfrac{\cancel{350}^{35}}{\cancel{10}} = 35$

अब सोचिए, अगर हम 35 को उत्तर मानते हैं तो न ये शुरुआती आंकड़ों से मेल खाते हैं न आख़िरी के आंकड़ों से। ऐसे में इसे इन आंकड़ों का मध्य बिन्दु मानना उचित नहीं होगा।

चलिए इसके साथ कुछ और करके देखते हैं। पहले रोटियों की संख्या वाले इन आंकड़ों को आरोही (बढ़ते) या अवरोही (घटते) क्रम में लगा लेते हैं।

आरोही क्रम में :

दिन	9	8	10	7	1	6	3	4	5	2
बनी रोटियों की संख्या	2	3	3	4	50	53	55	58	60	62

अब इसका मध्य बिन्दु निकालने के लिए हमें सिर्फ ये करना है कि क्रम में जो मध्य में आए वह आंकड़ा चुन लेना है। क्योंकि यहाँ कुल 10 आंकड़े हैं तो 5वें एवं 6वें आंकड़े का मध्य बिन्दु $\frac{50+53}{2} = \frac{103}{2} = 51.5$ होगा।

अवरोही क्रम में :

दिन	2	5	4	3	6	1	7	10	8	9
बनी रोटियों की संख्या	62	60	58	55	53	50	4	3	3	2

5वां आंकड़ा ← (53)   (50) → 6वाँ आंकड़ा

इसी प्रकार अवरोही क्रम में लगाने पर इसका मध्य बिन्दु $\frac{53+50}{2} = \frac{103}{2} = 51.5$ होगा। केन्द्र बिन्दु निकालने की दृष्टि से माध्य की तुलना में यह मान कहीं अधिक संगत है। सांख्यिकी में ऐसे आंकड़े को माध्यक या माध्यिका (median) कहते हैं।

अगर कुल n संख्याएँ दी हुई हैं जब n विषम (odd) हो,

माध्यक (median) = आरोही/अवरोही क्रम में रखी संख्याओं का $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें स्थान की संख्या,

अगर कुल n संख्याएँ दी हुई हैं जब n सम (even) हो तो,

माध्यक (median) =

आरोही/अवरोही क्रम में रखी संख्याओं का $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें एवं $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें स्थान की संख्याओं का माध्य/औसत

उदाहरण 1 : आंकड़े 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5 को आरोही क्रम में लगाने पर,

0, 1, 2, 3, 3, (3), 3, 4, 4, 5, 5 → 6वें स्थान की संख्या

अब चूँकि इन आंकड़ों में कुल संख्या n = 11 है, जो कि विषम (odd) है।

अतः माध्यक/माध्यिका (median) $= \frac{n+1}{2}$ वें स्थान की संख्या

$= \frac{11+1}{2}$ वें स्थान की संख्या

$= \frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{2}}$ वें स्थान की संख्या

= 6वें स्थान की संख्या

= 3

उदाहरण 2 : आंकड़े 2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3 को आरोही क्रम में लगाने पर

0, 1, 2, 3, (3), (3), 3, 4, 4, 5

→ 6वें स्थान की संख्या

→ 5वें स्थान की संख्या

अब चूँकि इन आंकड़ों में कुल संख्या n = 10 है, जो कि सम (even) है।

अतः माध्यक/माध्यिका (median) = $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें स्थान की संख्याओं का माध्य

$= \left(\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}\right)$ वें और $\left(\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}+1\right)$ वें स्थान की संख्याओं का माध्य

= 5वें और (5 + 1) वें स्थान की संख्याओं का माध्य

= 5वें और 6वें स्थान की संख्याओं का माध्य

$= \frac{3+3}{2} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}$

= 3

बहुलक (Mode)

यह प्रेक्षण का वह मान होता है जो बार–बार घटित होता रहता है, अर्थात् अधिकतम बारंबारता वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है।

रेडीमेड गार्मेन्ट (सिले सिलाए वस्त्र) उद्योग और जूता उद्योग केन्द्रीय प्रवृत्ति के इस माप का प्रयोग काफ़ी करते हैं। बहुलक की सहायता से ये उद्योग यह निर्णय ले लेते हैं कि किस साइज या माप का उत्पादन अधिक से अधिक संख्या में करना चाहिए।

इसे और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: 20 विद्यार्थियों द्वारा (10 में से) प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

हल : हम इन आंकड़ों को बढ़ते क्रम में लिखते हैं :

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6,6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

यहाँ 9 सबसे अधिक बार, अर्थात् चार बार आया है। अतः, बहुलक 9 है।

उदाहरण 2 : एक फैक्टरी की एक छोटी इकाई लीजिए जहाँ 5 व्यक्ति काम करते हैं, जिनमें एक सुपरवाइज़र और चार मज़दूर हैं। प्रत्येक मज़दूर को प्रति माह 7000 रुपये वेतन मिलता है, जबकि सुपरवाइजर को प्रति माह 15000 रुपये वेतन मिलता है। फैक्टरी की इस इकाई के वेतनों का माध्य, माध्यक और बहुलक परिकलित कीजिए।

हल :

माध्य = $\frac{7000 + 7000 + 7000 + 7000 + 17000}{5}$

$= \frac{\cancel{45000}^{9000}}{\cancel{5}}$

$= 9000$

अतः, माध्य वेतन 9000 रुपये प्रति माह है।

माध्यक ज्ञात करने के लिए, हम वेतनों को इस प्रकार आरोही क्रम में रखते हैं:

7000, 7000, 7000, 7000, 17000

क्योंकि फैक्टरी की इकाई में काम करने वाले लोगों की संख्या 5 है जो कि विषम संख्या है इसलिए माध्यक प्रेक्षण $\frac{5+1}{2}$ वाँ $= \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}$ वाँ = तीसरा प्रेक्षण होगा। अतः, माध्यक तीसरे प्रेक्षण का मान, अर्थात् 7000 रु प्रति माह होगा।

वेतनों का बहुलक, अर्थात् बहुलक वेतन ज्ञात करने के लिए, यहाँ हम यह पाते हैं कि आंकड़ों 7000, 7000, 7000, 7000, 17000 में 7000 अधिकतम बार आता है। इसलिए, बहुलक वेतन 7000 रुपये प्रति माह है।

अभ्यास के लिए अपनी कक्षा की पाठ्य–पुस्तक में दी गई प्रश्नावली 14.4 को हल करें।

आंकड़ों का विश्लेषण (Analysis of data)

इसके अन्तर्गत दिए हुए आंकड़ों से क्या–क्या जानकारियाँ निकाल सकते हैं, उसके बारे में बातचीत की जाती है।

उदाहरण 1 : नवीं कक्षा के 40 विद्यार्थियों से उनके जन्म का महीना बताने के लिए कहा गया। इस प्रकार प्राप्त आंकड़ों से निम्नलिखित आलेख बनाया गया।

दायीं तरफ़ दिए गए आलेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

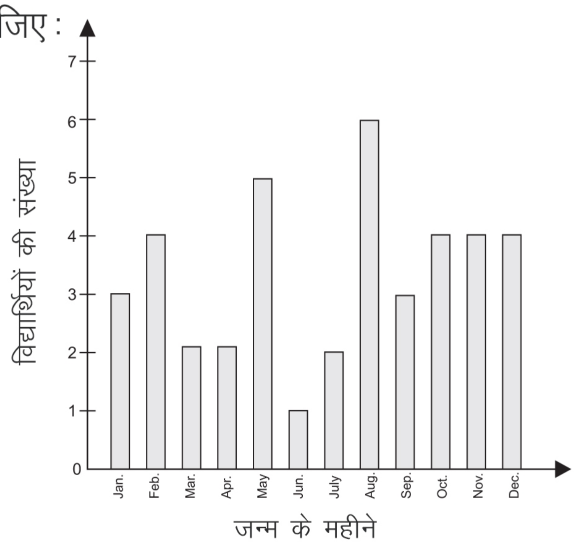
(1) नवंबर के महीने में कितने विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

(2) किस महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

(3) कितने विद्यार्थियों का जन्म अगस्त से पहले हुआ?

(4) कितने विद्यार्थियों का जन्म अगस्त के बाद हुआ?

(5) ऐसे महीनों के जोड़े ढूँढिए जिनमें एक–दूसरे की तुलना में तिगुना विद्यार्थियों का जन्म हुआ हो।



हल :

(1) नवंबर के महीने में 4 विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

(2) अगस्त के महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

(3) 19, (3 + 4 + 2 + 2 + 5 + 1 + 2 = 19) विद्यार्थियों का जन्म अगस्त से पहले हुआ।

(4) 15, (3 + 4 + 4 + 4 = 15) विद्यार्थियों का जन्म अगस्त के बाद हुआ।

(5) मार्च और अगस्त, अप्रैल और अगस्त, जुलाई और अगस्त, जून और सितम्बर, जून और जनवरी

उदाहरण 2 : नीचे एक आयत चित्र दिया गया है। इस आलेख को देखकर इसके नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखें।

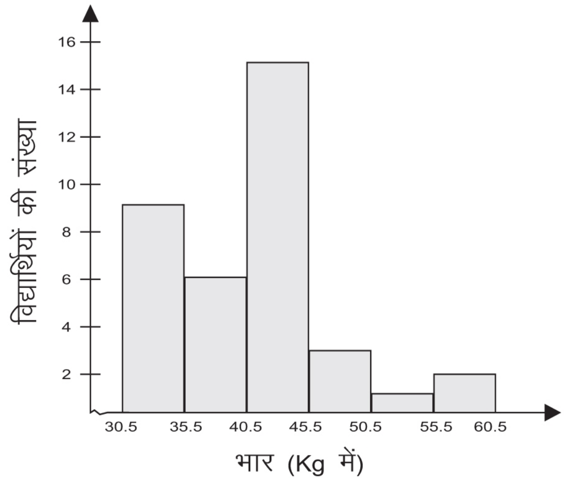
(1) कितने विद्यार्थियों का भार 50.5 kg से कम है?

(2) कितने विद्यार्थियों का भार 50.5 kg या उससे अधिक है?

(3) कितने विद्यार्थियों का भार 40.5 kg या उससे अधिक लेकिन 55.5 kg से कम है?

(4) किस भार वाले विद्यार्थियों की संख्या सबसे अधिक है?

(5) 60.5kg भार वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है?



हल : (1) 33, (9 + 6 + 15 + 3) विद्यार्थियों का भार 50.5 kg से कम है।

(2) 3, (1 + 2 = 3) विद्यार्थियों का भार 50.5 kg या उससे अधिक है।

(3) 19, (15 + 3 +1 = 19) विद्यार्थियों का भार 40.5 kg या उससे अधिक लेकिन 55.5 kg से कम है।

(4) 40.5 kg – 45.5 kg भार वाले विद्यार्थियों की संख्या सबसे अधिक है।

(5) 60.5 kg भार वाले विद्यार्थियों की संख्या शून्य (0) है क्योंकि इस आलेख में केवल 60.5 kg से कम भार वाले विद्यार्थियों का ही विवरण है 60.5 kg या उससे अधिक भार वाले का नहीं।

अतिव्यापी (overlapping) वर्ग अन्तराल में उपरि वर्ग सीमा को नहीं गिना जाता है।

दिए हुए आलेख में अतिव्यापी (overlapping) वर्ग अन्तराल है।

निर्वचन / व्याख्या (Interpretation)

आंकड़ों का विश्लेषण करने के बाद जो हम निष्कर्ष निकालते हैं या समस्या और समाधान की बात करते हैं उसे ही निर्वचन / व्याख्या कहा जाता है। अलग–अलग लोग अलग–अलग तरह से निर्वचन / व्याख्या करते हैं। इसके बारे में विस्तार से आगे की कक्षाओं में बात करेंगे।

अपने शिक्षक या किसी और की मदद से पिछले कुछ वर्षों के प्रश्न–पत्र प्राप्त करें और उसमें पूछे गए सांख्यिकी के प्रश्नों को हल करें। कोई समस्या आने पर अपने दूसरे साथी से पूछें। अगर फिर भी समाधान नहीं होता है तो शिक्षक से पूछें।

Published at Delhi Bureau of Text Books, 25/2, Institutional Area, Pankha Road, New Delhi-110058, by Anil Kaushal, Secretary, Delhi Bureau of Text Books and Printed at : Supreme Offset Press, K-5 Malviya Nagar New Delhi - 110017